Orientierungshilfe zum 7. Hausaufgabenblatt

25. Januar 2013

Aufgabe 38

a) Urnenmodell: Ziehen mit Zurücklegen.
Man stelle sich eine Urne mit zwei Kugeln, die eine weiß, die andere schwarz, vor. Für jedes einzelne der 16 Felder wird nun gezogen; entweder schwarz oder weiß. Für jedes einzelne Feld gibt es also genau zwei Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{16 \text{ mal}} = 2^{16} \text{ Möglichkeiten}$$

ein 4×4 Felder großes Brett weiß bzw. schwarz einzufärben.
b) Urnenmodell: Ziehen ohne Zurücklegen.
Man stelle sich eine Urne mit 16 Kugeln, acht davon schwarz, acht weiß, vor. Die erste gezogene Kugel steht für die Färbung des ersten Feldes, die zweite Urnenziehung für die Färbung des zweiten Feldes, usw. .
Anders kann man sich auch die Frage stellen, wie viele Möglichkeiten es gibt, acht schwarze Kugeln auf 16 Felder zu verteilen. Dies sind gerade

$$\binom{16}{8} = \frac{16!}{8! \cdot (16-8)!} = 12870 \text{ Möglichkeiten.}$$

c) Urnenmodell: Ziehen ohne Zurücklegen.
Es handelt sich hier um das gleiche Urnenmodell wie in b), nur hier sind zehn rote, vier schwarze und zwei weiße Kugeln in der Urne.
Auch hier stellt man sich die Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, zehn rote Kugeln zunächst auf 16 Felder zu verteilen. Dies sind gerade $\binom{16}{10}$ Möglichkeiten. Für die verbleibenden sechs Felder wiederum gibt es $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten vier schwarze Kugeln darauf zu verteilen, während die letzten beiden weißen Kugeln nur $\binom{2}{2} = 1$ Möglichkeit haben, verteilt zu werden. Insgesamt ergeben sich also

$$\binom{16}{10} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = \frac{16!}{10! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} = 96096 \text{ Möglichkeiten.}$$

Man beachte, dass man sich auch hätte fragen können, wie viele Möglichkeiten es gibt zwei weiße Kugeln auf 16 Felder, vier schwarze Kugeln auf 14 Felder und zehn rote Kugeln auf die verbleibenden zehn Feldern zu verteilen. Man kann sehen, dass durch

$$\binom{16}{2} \cdot \binom{14}{4} \cdot \binom{10}{10} = \frac{16!}{2! \cdot 14!} \cdot \frac{14!}{10! \cdot 4!} \cdot \frac{10!}{10! \cdot 0!} = 96096.$$

das selbe Ergebnis erhält.
d) Urnenmodell: Ziehen ohne Zurücklegen.
Man stelle sich eine Urne mit vier nummerierten Kugeln, eine Kugel für jede Zeile von eins bis vier, vor. In der ersten Ziehung zieht man nun diejenige Zeilennummer, die das Feld in der ersten Spalte des 4×4 Brettes schwarz färbt. In der zweiten Ziehung, bei der nur noch drei Kugeln in der Urne vorhanden sind, zieht man wiederum die Zeilennummer, die das Feld in der zweiten Spalte schwarz färbt. Usw. (Man kann in diesem Beispiel auch Zeilen mit Spalten vertauschen.)
In der ersten Ziehung hab man vier Möglichkeiten, in der zweiten nur noch drei, usw. Damit ergeben sich ingesamt

$$4! = 24 \text{ Möglichkeiten}$$

das Brett zu färben.

Aufgabe 40

In dieser Aufgabe möchte man die Anzahl an Rosinen errechnen, die man benötigt, um in einem in zehn gleich große Stücke aufgeteilten Teig mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 in jedem Stück mindestens eine Rosine zu finden. Somit ist das Ereignis A gerade $A =$'In jedem Stück ist mindestens eine Rosine'. Das Gegenereignis ist wiederum $A^C =$'In einem Stück ist keine Rosine'.
Wir betrachten den Hinweis des Aufgabenzettels etwas genauer; man hat zehn Felder als Repräsentanten für die zehn Teigstücke. Man nehme sich die erste Rosine und verteilt sie zufällig auf eines der Felder. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem bestimmten Feld diese Rosine ist, ist gerade $\frac{1}{10}$; die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht in einem bestimmten Feld ist, beträgt $\frac{9}{10}$. Anhnad eines Baumdiagrammms kann man sich die Wahrscheinlichkeiten für eine zweite, dritte, usw. Rosine überlegen.

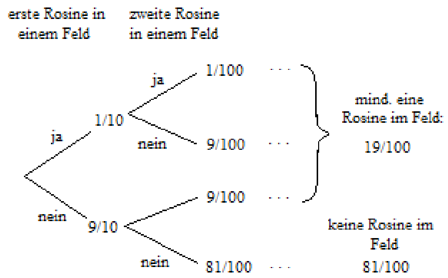

Abbildung 1: Skizze eines Baumdiagramms zur Veranschaulichung

Es ist ersichtlich, dass nach n Versuchen, also n Rosinen wurden auf die zehn Felder zufällig verteilt, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Feld keine Rosine hat, 0.9^n ist. Wir wollen nun n bestimmen; genauer mit einer Wahrscheinlichkeit $P(A^C) = 0.01$ soll keine Rosine in einem der Felder sein, d.h.

$$\begin{aligned}
&P(A^C) = 0.01 = (0.9)^n \\
&\Leftrightarrow \log(0.01) = \log\left((0.9)^n\right) \\
&\Leftrightarrow \log(0.01) = n \log(0.9) \\
&\Leftrightarrow n = \frac{\log(0.01)}{\log(0.9)} \\
&\Leftrightarrow n = 43.7087.
\end{aligned}$$

Wenn man also 44 Rosinen in den Teig mischt, hat man mit einer Sicherheit von 99% mindestens eine Rosine im Brötchen.
Man beachte den Zusammenhang $0.99 = P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - (0.9)^n$.
Als Urnenmodell kann man sich eine Ziehung von zehn nummerierten Kugeln, die als Repräsentanten für die einzelnen Teigstücke stehen, mit Zurücklegen vorstellen, bei dem in jedem Durchgang eine Rosine auf die Teigstücken verteilt wird.

Aufgabe 42

Zunächst muss man sich klar werden, inwiefern die Aufgabenstellung mit Hilfe des Binomialkoeffizienten beschrieben werden kann. Die kürzeste Verbindung wird offenbar dadurch gewährleistet, dass man von dem Punkt $(0, 0)$ nur nach rechts oder nach oben gehen kann bis man in $(8, 6)$ endet. Man geht also 14 Schritte. Man kann sich vorstellen, dass ein möglicher Weg eindeutig beschrieben werden kann durch eine Kette von Buchstaben (z.B. 'ROOORRORRROR' in der Abbildung), wobei 'R' für 'nach rechts laufen' und 'O' für 'nach oben laufen' steht. Für das Urnenmodell stellt man sich vor, dass man eine Urne mit 14 nummerierten Kugeln hat, aus der man ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge acht Mal zieht, um die Positionen für die acht Buchstaben

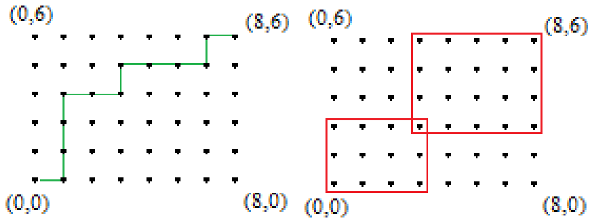

Abbildung 2: Darstellung eines möglichen Wegs vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(8,6)$ sowie die Einschränkung, dass der Weg durch den Punkt $(4,3)$ gehen muss.

'R' festzulegen.
Man kann sich also fragen, wie viele Möglichkeiten es gibt, acht Buchstaben 'R' auf 14 Positionen zu verteilen. Demnach gibt es also

$$\binom{14}{8} = 3003 \text{ Möglichkeiten}$$

von A nach B zu kommen. An diesem Beispiel kann man sich eine wichtige Eigenschaft des Binomialkoeffizienten klar machen. Es gilt nämlich

$$\binom{s+t}{t} = \binom{s+t}{s} \text{ für zwei natürliche Zahlen } s, t.$$

Man kann sich nämlich auch die Frage stellen, wie viele Möglichkeiten es gibt, sechs Buchstaben 'O' auf 14 Positionen zu verteilen. Etwas genauer beschrieben:

$$\binom{8+6}{8} = \frac{14!}{8! \cdot (14-8)!} = \frac{14!}{6! \cdot (14-6)!} = \binom{8+6}{6}.$$

Das eben beschriebene Urnenmodell führt direkt auf den Binomialkoeffizienten. Man hätte sich aber auch eine Urne mit sechs 'O's und acht 'R's nehmen können, aus der ohne Zurücklegen und MIT Beachtung der Reihenfolge gezogen wird. Für dieses Urnenbeispiel ist aber der Zusammenhang zum Binomialkoeffizienten nicht leicht zu sehen.
a)
Nach den obigen Vorüberlegungen können wir nun zunächst alle Möglichen Wege von $(0,0)$ nach $(4,3)$ berechnen (siehe Abbildung). Dies ist gerade $\binom{4+3}{4} = 35$. Die Anzahl aller möglichen Wege von $(4,3)$ nach $(8,6)$ ist analog $\binom{(8-4)+(6-3)}{8-4} = \binom{7}{4} = 35$. Somit ist die Gesamtanzahl an Wegen von $(0,0)$ nach $(8,6)$ über $(4,3)$ gerade $35 \cdot 35 = 1225$. Betrachtet man dies nun im Zusammenhang mit allen Wegen (3003 Möglichkeiten), so ist

die Wahrscheinlichkeit, dass ein Weg über den Punkt $(4,3)$ führt $P(E) = \frac{1225}{3003} \approx 0.4079$.
b)
Wir betrachten zunächst das Gegenereignis F^D ='der zufällig gewählte Weg führt über $(2,5)$'. Wir gehen wie in a) vor und erhalten eine Wahrscheinlichkeit von $P(F^D) = \frac{\binom{7}{5}\cdot\binom{7}{6}}{3003} = \frac{147}{3003}$. Daraus können wir sofort schlussfolgern, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Weg nicht über den Punkt $(2,5)$ geht, durch $P(F) = 1 - P(F^D) = 1 - \frac{147}{3003} \approx 0.951$ beträgt.
c)
Aus den Aufgabenteilen a) und b) ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeiten, dass der Weg durch den Punkt $(4,3)$ bzw. durch den Punkt $(2,5)$ geht, bei $P(D) = \frac{2856}{3003}$ bzw. $P(C) = \frac{1225}{3003}$ liegen. Da wir immer den kürzesten Weg suchen, also 14 Schritte, kann man sich anhand der Lage der Punkte klar machen, dass es keinen Weg von 14 Schritten gibt, der durch beide Punkte geht. Somit sind dies zwei disjunkte Mengen und man hat eines Gesamtwahrscheinlichkeit von $\frac{1225}{3003} + \frac{147}{3003} \approx 0.45688$. Würde es Weg geben, die durch beide Punkte gehen, so müsste man die Wahrscheinlichkeit, dass ein Weg durch beide Punkte geht, zusätzlich abziehen. Warum? Diese Wege sind bereits in der Wahrscheinlichkeit, dass der Weg durch den einen Punkt geht, und der Wahrscheinlichkeit, dass der Weg durch den zweiten Punkt geht, enthalten; kommen also zweimal vor:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D).$$