Orientierungshilfe zum 6. Hausaufgabenblatt

25. Dezember 2012

Aufgabe 32

Eine geeignete Darstellung für den dreimaligen Würfelwurf wäre beispielsweise:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3 \text{ mit } |\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216.$$

Im Folgenden wird auf die ausführlich Auflistung aller Elemente verzichtet.
a)

$$\begin{aligned} A &= \{(i, j, k) \in \Omega | i + j + k = 9\} \\ &= \{(1, 2, 6); (1, 6, 2); (6, 1, 2); \ldots\} \text{ mit } |A| = 25. \\ &\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{25}{216}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} B &= \{(i, j, k) \in \Omega | i + j + k = 10\} \\ &= \{(1, 3, 6); (1, 6, 3); (6, 1, 3); \ldots\} \text{ mit } |B| = 27. \\ &\Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{27}{216}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} C &= \{(i, j, k) \in \Omega | i + j + k \text{ ist gerade } \} \\ &= \{(i, j, k) \in \Omega | i + j + k = 2n, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{(4, 2, 4); (4, 4, 2); (2, 4, 4); \ldots\} \text{ mit } |C| = 25. \\ &\Rightarrow P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hierbei kann man sich folgendes veranschaulichen:
Man kann die Augensumme gewisserweise anordnen; dabei kann man zwei Beobachtungen machen:

Die Summe von $(1,1,1)$ ist drei also ungerade und $(1,1,1)$ kommt in Ω einmal vor; addiert man an einer Stelle 1 dazu, z.B. $(1,1,2)$ so ist die Summe gerade, wieder 1 dazu addiert, z.B. $(1,1,3)$ und die Summe ist wieder ungerade,... Gerade Augensummen wechseln sich mit ungeraden ab.
Von $(1,1,2)$ gibt es genau drei Permutationen, nämlich $(1,1,2),(1,2,1)$ und $(2,1,1)$. Das Gegenstück dazu wäre $(2,2,1)$. Hier ist die Augensumme ungerade und $(2,2,1)$ kommt genauso oft vor wie $(1,1,2)$. Man kann also zu jedem Element aus Ω, welches eine ungerade Augensumme hat, ein Element aus Ω mit gerader Augensumme finden. Die Hälfte der Elemente von Ω haben also eine gerade Augensumme.
d)

$$\begin{aligned}D &= \{(i,j,k) \in \Omega | i \cdot j \cdot k = 2n+1, n \in \mathbb{N}\}\\ &= \{1,3,5\}^3\\ &= \{(1,1,1);(1,3,1);(1,1,3);\ldots\} \text{ mit } |D| = 27.\\ &\Rightarrow P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{27}{216}.\end{aligned}$$

Hier muss man darauf achten, dass man nur Tupel (i,k,j) betrachten kann, bei denen i,j,k ungerade sind.

Aufgabe 34

a)
Man stelle sich für diese Aufgabe vor, dass man ein Säckchen hat, in dem die Buchstaben 'B', zweimal 'A', zweimal 'N', 'E' vorkommen, und aus welchem der Affe zieht. Wir wollen das Wort 'Banane' legen; der Affe hat also beim ersten Ziehen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ den Buchstaben 'B' gezogen. Da es sich hierbei um ein Modell ohne Zurücklegen handelt, haben wir nun nur noch fünf Buchstaben übrig. Nun soll der Buchstabe 'A' gezogen werden, dieser tritt jedoch zweimal auf, sodass der Affe ihn mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{5}$ zieht. In diesem Sinne wird weitergezogen, sodass letztlich gilt:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{180}.$$

Man mache sich für die weiteren Überlegungen klar, dass auch ein anderes Wort, wie zum Beispiel das Wort 'Nanabe', auch mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{180}$ gezogen wird.
b)
Auch hier stellen wir uns wieder ein Buchstabensäckchen vor, aus welchem der Affe zieht. Wieder zieht er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ den Buchstaben 'B' zuerst. Nun ist es aber egal, welchen Buchstaben er als nächstes zieht, solange es nicht der Buchstabe 'E' ist, d.h. er zieht ein 'N' oder ein 'A' mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$. Dies führt sich so fort, da auch die dritte bis fünfte Stelle irrelevant sind, bis zum Schluss mit Wahrscheinlichkeit 1 nur noch der Buchstabe 'E' übrig bleibt. Genauer:

$$P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{30}.$$

c)
Eine mögliche Rangehensweise an diesen Aufgabenteil kann sein, dass man sich die Problemstellung zunächst vereinfacht. Die Vorderung 'die Buchstaben 'A' und 'N' treten jeweils als Doppelbuchstaben auf' entspricht der Vorstellung, dass man lediglich vier Buchstaben ('B','A','N','E') betrachtet. Es gibt $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ mögliche Wörter, die man mit diesen Buchstaben legen kann. Wir haben in Aufgabenteil a) festgestellt, dass für sechs Buchstaben ('B', zweimal 'A', zweimal 'N', 'E') es 180 mögliche Wörter gibt. Also

$$P(C) = \frac{24}{180} = \frac{2}{15}.$$

Man kann sich an dieser Stelle vielleicht fragen, warum es 180 und nicht $6! = 720$ mögliche Wörter gibt. Diese Antwort steckt versteckt in Aufgabenteil a), denn: Hätte man sechs verschieden Buchstaben, so könnte man mit diesen 6! verschiedene Wörter legen. Da wir hier aber die Buchstaben 'A' und 'N' doppelt haben, müssen wir durch $2 \cdot 2$ teilen, also $\frac{720}{4} = 180$. Betrachtet man das Wort 'Banane', so stellt man fest, dass von den 720 möglichen Wörtern, die man legen kann, vier das Wort 'Banane' ergeben. Warum? Wir nummerieren die Buchstaben 'A' und 'N' einmal (man kann sie auch farblich kennzeichnen). Wir haben also die Buchstaben 'B', 'E', $'A_1'$, $'A_2'$, $'N_1'$, $'N_2'$ und 720 verschiedene mögliche Wörter, die wir legen können. Das Wort 'Banane' ergibt sich somit durch:

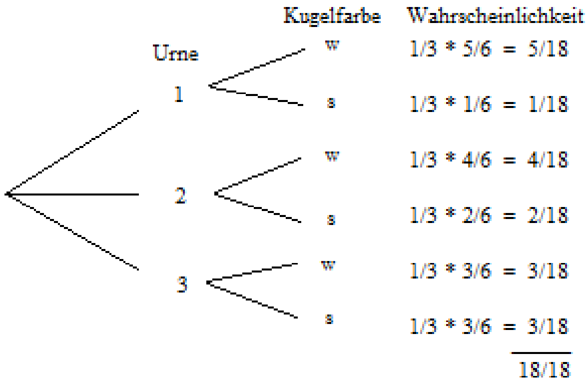
$$\begin{aligned}&BA_1N_1A_2N_2E\\&BA_2N_1A_1N_2E\\&BA_1N_2A_2N_1E\\&BA_2N_2A_1N_1E.\end{aligned}$$

Aufgabe 36

a)
Der Stichprobenraum kann entweder durch $\Omega = \{w; s\}$ mit 'w' für weiße und 's' für schwarze Kugel oder durch $\Omega = \{(1, w); (2, w); (3, w); (1, s); (2, s); (3, s)\}$ mit $(1, w)$ für weiße Kugel aus Urne 1, usw. angegeben werden. Analog dazu ist dann das Ereignis $W = \{w\}$ bzw. $W = \{(1, w); (2, w); (3, w)\}$. Man kann sich die Problemstellung gut in einem Baumdiagramm veranschaulichen.
Damit ergibt sich für den Gefangenen eine Überlebenswahrscheinlichkeit von

$$P(W) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

b) Nun kann der Gefangene die Kugeln vorher selbst verteilen und ihre Anzahl innerhalb der Urnen verändern. Die optimale Verteilung der Kugeln kann er erreichen, wenn er in die erste Urne nur eine weiße Kugel, in die zweite Urne ebenfalls nur eine weiße Kugel und in die dritte Urne alle übrigen also zehn weiße und sechs schwarze Kugeln legt. Dann



ergibt sich eine Überlebenswahrscheinlichkeit von

$$P(W') = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{16} = \frac{7}{8}.$$

Warum gibt es keine bessere Verteilung? Da wir davon ausgehen, dass keine Urne leer bleiben darf, kann eine mögliche bessere Verteilung nur zustande kommen, wenn aus der dritten Urne eine oder mehrere Kugel auf die anderen beiden umverteilt werden. Verlegt man beispielsweise eine weiße Kugel aus der dritten Urne in die erste, so verringert sich nur die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel aus Urne drei zu ziehen auf $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{15}$ und damit auch $P(W)$. Entnimmt man beispielsweise eine schwarze, so erhöht man zwar die Wahrscheinlichkeit in der dritten Urne eine weiße Kugel zu ziehen auf $\frac{1}{3} \cdot \frac{10}{15}$, aber man verringert die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel in Urne eins zu ziehen von $\frac{1}{3} \cdot 1$ auf $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ und sorgt wiederum für eine schlechte Gesamtüberlebenschance. Macht man dies für mehr als eine Kugel aus der dritten Urne, so wird die Gesamtüberlebenschance $P(W) \leq \frac{7}{8}$ sein.