Orientierungshilfe zum 5. Hausaufgabenblatt

8. Dezember 2012

1 Aufgabe 25

a) Es gilt $A \backslash C = \{3, 6, 9\}$ und $C \backslash A = \{1, 4, 5, 7\}$. Somit folgt $(A \backslash C) \cup (C \backslash A) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.
b) Es gilt A^C=\{1,2,4,5,7,8,9\} und somit $A^C \backslash B = \{1, 5, 7\}$. Weiter gilt $C^C = \{2, 3, 6, 8, 9\}$ und $C^C \backslash B = \{3, 9\}$. Zusammen gilt somit $(A^C \backslash B) \cup (C^C \backslash B) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
c) Es gilt $A \backslash B = \{3, 9\}$ und $C \backslash B = \{1, 5, 7\}$. Somit folgt $(A \backslash B \times C \backslash B) = \{(3, 1), (3, 5), (3, 7), (9, 1), (9, 5), (9, 7)\}$.
d) Es gilt $\mathcal{P}(C \backslash B) = \{\{1\}, \{5\}, \{7\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{5, 7\}, \{1, 5, 7\}, \emptyset\}$

2 Aufgabe 26

d) $0 \in \{\emptyset\}$ ist falsch, da 0 eine Zahl und das einzige Element in $\{\emptyset\}$ die leere Menge $\emptyset$ ist.
e) $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(\emptyset)$ ist wahr, da $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$ ist also insbesondere auch Teilmenge.
f) $\{\emptyset\} \cup \emptyset = \{\emptyset, \emptyset\}$ ist wahr, denn es gilt zum Einen $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$ und zum Anderen $\{\emptyset\} \cup \emptyset = \{\emptyset\}$.

3 Aufgabe 28

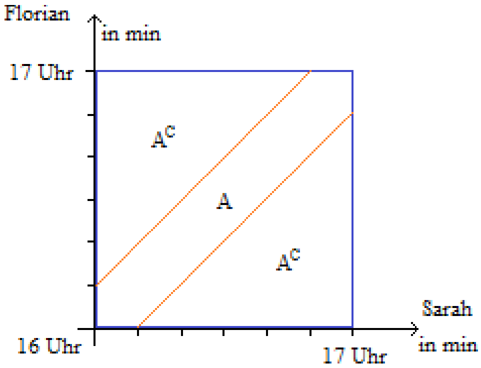
a) S ist keine σ-Algebra. So wird z.B. die zweite Eigenschaft für σ-Algebren (mit $A \in S \Rightarrow A^C \in S$) für die Menge $\{111\} \in S$ verletzt, da $\{111\}^C \neq S$.
b)

$$\begin{aligned} S &= \{\emptyset, \Omega, \{111\}, \{111\}^C, A, A^C, B, B^C\} \text{ , wobei} \\ A &:= \{000, 001, 010, 011\}, \\ A^C &:= \{100, 101, 110, 111\}, \\ B &:= \{100, 101, 110\}, \\ B^C &:= \{001, 000, 010, 011, 111\}. \end{aligned}$$

Folglich hat S acht Elemente.

4 Aufgabe 30

a)



b)
(i)

$$P(A) = \frac{F(A)}{F(\Omega)} = 1 - \frac{F(A^C)}{F(\Omega)} = 1 - P(A^C) \text{ , wobei}$$
$$F(\Omega) = 60\,\text{min} \cdot 60\,\text{min} = 3600\,\text{min}^2,$$
$$F(A^C) = 50\,\text{min} \cdot 50\,\text{min} = 2500\,\text{min}^2,$$
$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{2500\,\text{min}^2}{3600\,\text{min}^2} = 1 - \frac{25}{36} = \approx 0,3056.$$

(ii)

$$P(A') = 1 - P(a'^C) = 1 - \frac{F(A)}{F(\Omega)} \text{ , wobei}$$
$$F(A'^C) = 55\,\text{min} \cdot 55\,\text{min} = 3025\,\text{min}^2,$$
$$\Rightarrow P(A') = 1 - \frac{3025\,\text{min}^2}{3600\,\text{min}^2} \approx 0,1597.$$

c) Man mache sich klar, dass gilt:

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{F(A^C)}{F(\Omega)} = 1 - \frac{(60min - \lambda)^2}{3600\,\text{min}^2}.$$

Dann kann man einsetzen und umstellen, sodass

$$
\begin{aligned}
&P(A) = \frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{60\,\mathrm{min} - \lambda}{60\,\mathrm{min}}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{60\,\mathrm{min} - \lambda}{60\,\mathrm{min}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow \lambda = 60\,\mathrm{min} - \frac{60\,\mathrm{min}}{\sqrt{2}} \approx 17{,}574\,\mathrm{min}\,.
\end{aligned}
$$