Orientierungshilfe zum 10. Hausaufgabenblatt

4. Februar 2013

Aufgabe 54

Zunächst erstellen wir die Wertetabelle.

ω	$W(\omega)$	$V(\omega)$	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$U(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$
'JEDE'	4	2	1	0	0
'GERADE'	6	3	1	0	0
'ZAHL'	4	1	0	0	0
'AB'	2	1	0	0	0
'VIER'	4	2	1	1	1
'IST'	3	1	0	1	0
'DIE'	3	2	1	1	1
'SUMME'	5	2	1	0	0
'ZWEIER'	6	3	1	1	1
'PRIMZAHLEN'	10	3	1	1	1

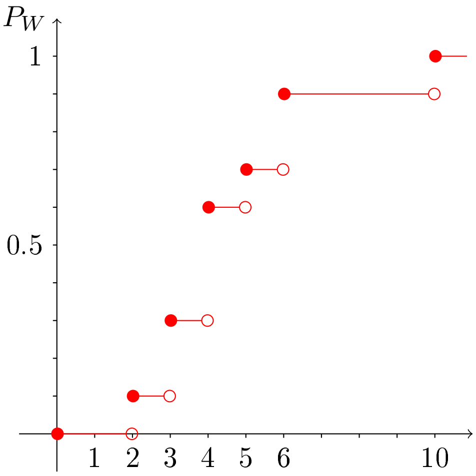
Nun erstellen wir mit Hilfe der Wertetabelle die benötigten Wahrscheinlichkeiten. Zunächst für die Zufallsvariablen W und V.

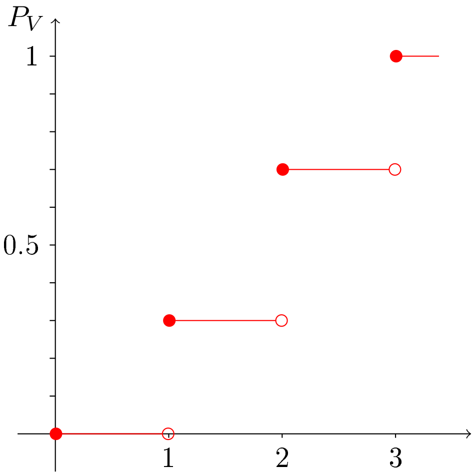
k	$P(W = k)$	$F_W(k) = P(W \leq k)$	$P(V = k)$	$F_V(k) = P(V \leq k)$
1	0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{7}{10}$
3	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	1
4	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	0	0
5	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	0	0
6	$\frac{2}{10}$	$\frac{9}{10}$	0	0
10	$\frac{1}{10}$	1	0	0

Nun nochmal für die Zufallsvariablen X, Y und U.

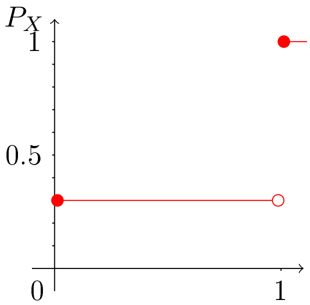
k	$P(X=k)$	$F_X(k)$ $= P(X \leq k)$	$P(Y=k)$	$F_Y(k)$ $= P(Y \leq k)$	$P(U=k)$	$F_U(k)$ $= P(U \leq k)$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{10}$
1	$\frac{7}{10}$	1	$\frac{5}{10}$	1	$\frac{4}{10}$	1

Mit diesen Werten können wir nun die Verteilungsfunktionen für W und V zeichnen. (Diese sind auch die interessantesten Funktionen.)





Exemplarisch für die Zufallsvariablen X, Y und U zeichnen wir die Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable X. Aus diesen Verteilungsfunktionen können nicht sehr viele Erkenntnisse gezogen werden, da die Zufallsvariablen nur den Wert 0 oder 1 annehmen kann.



Aufgabe 56

a)
Die Methode des Arztes A wird verworfen, wenn $X < 11$. Wir gehen davon aus, dass Arzt A recht hat, seine Methode also mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.8$ funktioniert.

Wir suchen also $P(X_A < 11)$.

$$\begin{aligned}
P(X_A < 11) &= 1 - P(X \geq 11) \\
&= 1 - (P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14)) \\
&= 1 - \left(\binom{14}{11} 0.8^{11} 0.2^3 + \binom{14}{12} 0.8^{12} 0.2^2 + \binom{14}{13} 0.8^{13} 0.2^1 + \binom{14}{14} 0.8^{14} \right) \\
&\approx 0.3018.
\end{aligned}$$

Folglich wird die Methode des Arztes A zu 30.18% abgelehnt, obwohl er Recht hatte.
b)
Die Methode des Arztes B wird angenommen, wenn $X \geq 11$. Wir gehen davon aus, dass Arzt B aber einfach rät. Da die Wahrscheinlichkeit fürs 'raten' nicht genau aus der Aufgabenstellung ersichtlich ist, wurden alle Lösungen zugelassen, die eine einleuchtende Erklärung für den Wert p haben. Eine Möglichkeit wäre von drei Augenfarben 'grün','blau' und 'braun' auszugehen, unter der Annahme, dass alle drei gleich wahrscheinlich sind. Also die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ ist.

$$\begin{aligned}
P(X_B \geq 11) &= P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14) \\
&= \left(\binom{14}{11} \frac{1}{3}^{11} \frac{2}{3}^{3} + \binom{14}{12} \frac{1}{3}^{12} \frac{2}{3}^{2} + \binom{14}{13} \frac{1}{3}^{13} \frac{2}{3}^{1} + \binom{14}{14} \frac{1}{3}^{14} \right) \\
&\approx 0.000691.
\end{aligned}$$

Folglich wird die Methode des Arztes B zu 0.07% angenommen, obwohl er geraten hat. Geht man jedoch von einer Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0.5$ aus, so verändern sich die Wahrscheinlichkeit auf

$$\begin{aligned}
P(X_B \geq 11) &= P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14) \\
&= \left(\binom{14}{11} 0.5^{11} 0.5^3 + \binom{14}{12} 0.5^{12} 0.5^2 + \binom{14}{13} 0.5^{13} 0.5^1 + \binom{14}{14} 0.5^{14} \right) \\
&= 0.5^{14} \left(\binom{14}{11} + \binom{14}{12} + \binom{14}{13} + \binom{14}{14} \right) \\
&\approx 0.028687.
\end{aligned}$$

Folglich wird die Methode des Arztes B zu $2,87\%$ angenommen, obwohl er geraten hat.

Aufgabe 58

Für diese Aufgabe definieren wir uns zunächst die Menge $W =$'Menge der 10 defekten (d_i) und der 40 intakten (n_i) Stücke'$= \{d_1, \ldots, d_{10}, n_1, \ldots, n_{40}\}$. Es gilt $|W| = 50$, also dass 50 Elemente in W enthalten sind. Wir wollen jetzt Ω betrachten. Da wir zehn Mal ziehen, können wir $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_{10}) | x_i \in W\}$ als die Menge aller möglichen zehn Ziehungen betrachten. Die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ordnet dann jedem 10-Tupel gerade die Anzahl aller defekten Stücke zu, d.h. $\omega = (x_1, \ldots, x_{10}) \mapsto r$ mit $r =$'Anzahl der defekten

Stücke'.
Wir betrachten für die ersten beiden Aufgabenteile die hypergeometrische Verteilung.
a)
Gesucht ist zu $N = 50$ Stücke, $M = 10$ defekte Stücke, $n = 10$ Ziehungen und $k = 2$ gezogenen defekten Stücke die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}P(X = k) &= \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{\binom{10}{2}\binom{40}{8}}{\binom{50}{10}} \\ &\approx 0.3369.\end{aligned}$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den zehn Ziehungen genau zwei defekte Stücke sind, 33.7%.
b)
Gesucht ist hier nun

$$\begin{aligned}P(X \geq k) &= 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left(\frac{\binom{10}{0}\binom{40}{10}}{\binom{50}{10}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{40}{9}}{\binom{50}{10}}\right) \\ &\approx 0.65129.\end{aligned}$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den zehn Ziehungen mindestens zwei defekte Stücke sind, 65.1%.
c)
Für diesen Aufgabenteil wollen wir nun die Binomialverteilung verwenden. Dazu müssen wir zunächst p berechnen. Die Trefferwahrscheinlichkeit für ein defektes Stück ist $p = \frac{M}{N} = 0.2$. Wir berechnen nun die Aufgabenteile a) und b) nocheinmal mit der Binomialverteilung.
ca)

$$\begin{aligned}P(X = 2) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \binom{10}{2} 0.2^2 0.8^8 \\ &\approx 0.302.\end{aligned}$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit nun bei $30,2\%$ also relativ nahe am Ergebnis, welches wir mit der hypergeometrischen Verteilung berechnet haben.
cb)

$$\begin{aligned}P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - \left(\binom{10}{0} 0.2^0 0.8^{10} + \binom{10}{1} 0.2^1 0.8^9\right) \\ &\approx 0.6242.\end{aligned}$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit nun bei $62,4\%$, also ebenfalls nahe an dem anderen Ergebnis.