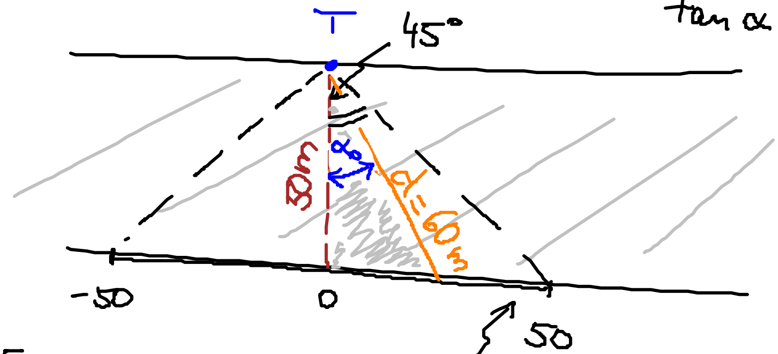
Vorlesung vom 29.11.2012:

Ü29) Teil b):



$$\tan\alpha = \frac{Gk}{Ak} = \frac{50}{50} = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha = 45°$$

Gesucht: $\alpha_0 \in [0, 45°]$ mit

$$\cos\alpha_0 = \frac{Ak}{Hypo} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6} \Rightarrow \boxed{\alpha_0 = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = \arccos\left(\frac{5}{6}\right) \approx 33{,}6°}$$

„Grenzwinkel"

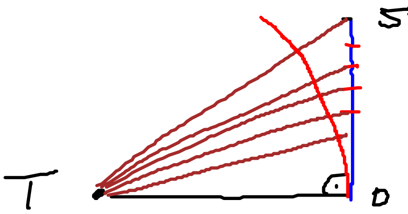
Neuer Grundraum:

$$\boxed{\Omega = [-45°; 45°]} \; ; \; \boxed{A = [-\alpha_0, \alpha_0] \approx [-33{,}6°; +33{,}6°]}$$

Dann gilt: $\boxed{P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)} = \frac{2\cdot\alpha_0}{90°} \approx \frac{67{,}2°}{90°} = 0{,}7457\ldots \approx 74{,}6\%}$

$90° = 45° - (-45°)$

Warum existiert dieser Unterschied? Es liegt in der Trigonometrie begründet:



Zur Hausaufgabe H30): Was ist hier der Grundraum Ω?

Die Einzelergebnisse sind geordnete Paare $\omega = (x_S, y_F)$ mit

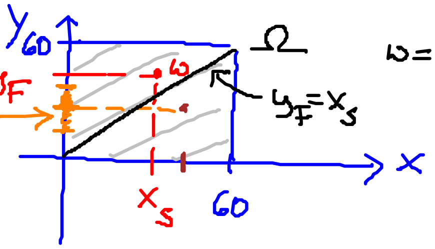
x_S: Ankunftszeitdifferenz zu 16:00h von Sarah

y_F: ——————"—————— von Florian

$\} \; x_S, y_F \in [0, 60]$

$\Longrightarrow \Omega=[0,60]\times[0,60]=[0,60]^2=\{(x_S,y_F)\mid 0\le x_S,y_F\le 60\}$

„Spielraum" für Florian: $[x_S-\lambda,\, x_S+\lambda]$



$\omega=(x_S,y_F)$

Zur Wahrscheinlichkeitsabbildung $P: \underbrace{S}_{\sigma\text{-Algebra}} \to \mathbb{R}$:

$A\in S \longmapsto P(A)\in\mathbb{R}$

3 Axiome (Kolmogorov):

1) $\boxed{P(\Omega)=1}$, 2) $\boxed{P(A)\in[0,1]}$, 3) $\boxed{P(A_1\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+\ldots+P(A_n) \text{ für } A_i\cap A_k=\emptyset,\ i\neq k}$

disjunkte Ereignisse

Folgerungen: a) $P(\emptyset)=0$, denn für $A_1=A_2=\emptyset$

unmögliches Ereignis

gilt: $A_1\cap A_2=\emptyset\cap\emptyset=\emptyset$, $A_1\cup A_2=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$

$\Rightarrow \boxed{P(\emptyset)}=P(A_1\cup A_2)\underset{(3)}{=}P(A_1)+P(A_2)=2\cdot P(\emptyset)$ $\quad -P(\emptyset)$

$\Longrightarrow 0=P(\emptyset)$ ✓

b) $\boxed{P(A^c)=1-P(A)}$ Sehr wichtig!

$\Longleftrightarrow P(A)=1-P(A^c)$

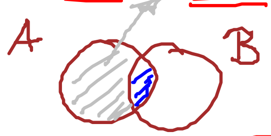
Beachte: Häufig ist es leichter, die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses A^c auszurechnen als $P(A)$ selbst!!

„Beweis":

$\Omega=A\cup A^c$ und $A\cap A^c=\emptyset \Longrightarrow P(A)+P(A^c)\overset{(3)}{=}P(A\cup A^c)=P(\Omega)$

$\underset{(1)}{=}1$

c) $P(A\setminus B)=P(A\setminus(A\cap B))\underset{(3)}{=}P(A)-P(A\cap B)$,



da $P(A\cap B)+P(A\setminus(A\cap B))=P(A)$

d) $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$ Formel für allgemeine Vereinigung

Warum? Es ist $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, $(A\setminus B) \cap B = \emptyset$

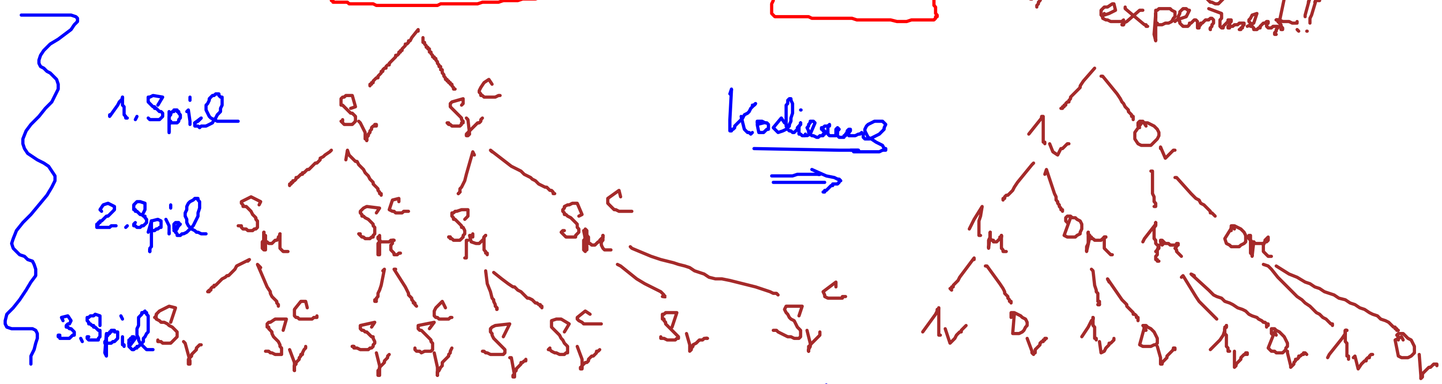
$$\Rightarrow P(A\cup B) \underset{(3)}{=} \underbrace{P(A\setminus B)}_{(c)} + P(B) = P(A) - P(A\cap B) + P(B)$$

Mehrstufige Zufallsexperimente und Baumdiagramme:

Beispiel: Karl möchte sein Taschengeld aufbessern. Vater sagt: „Ok, du bekommst mehr Geld, wenn du 3 abwechselnde Tischtennispartien gegen deine Mutter und mich spielst und dabei zweimal hintereinander gewinnst." Karls Siegwahrscheinlichkeit $P(S_M)=p$ gegen die Mutter ist auf jeden Fall größer als seine Siegwahrscheinlichkeit $P(S_V)=q$ gegen den Vater; also $p>q$.

Frage: Welche Strategie ist für Karl erfolgversprechender:

1) $\boxed{V-M-V}$ oder 2) $\boxed{M-V-M}$? // 3-stufiges Zufallsexperiment!!

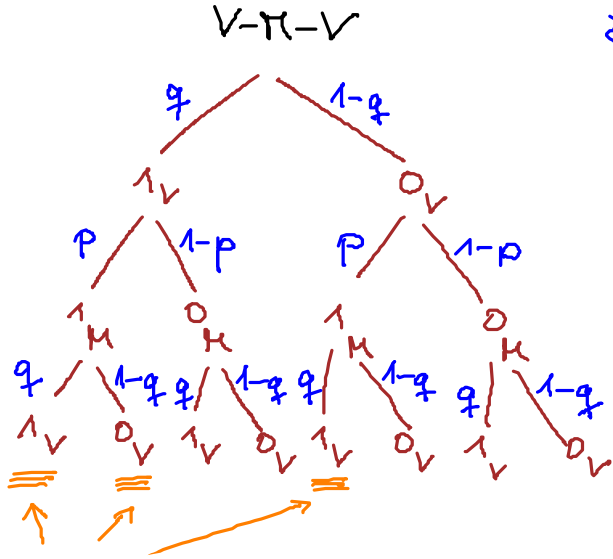


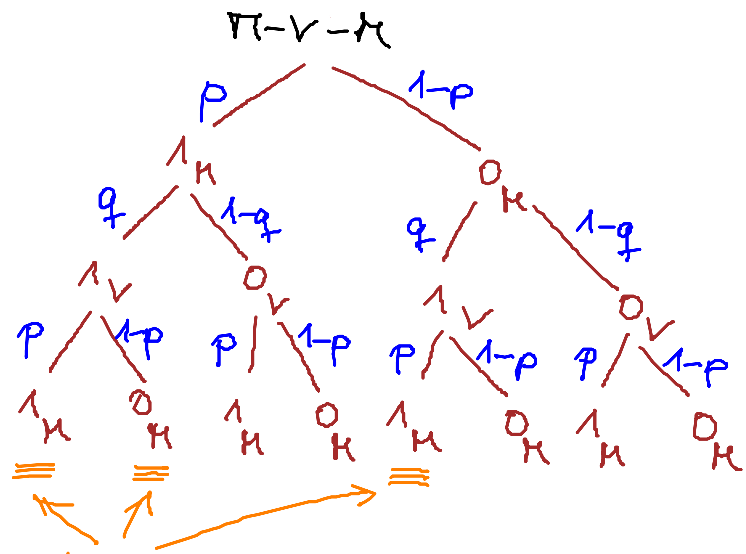
Schreiben wir an die Pfade im kodierten Baumdiagramm einmal die einzelnen Wahrscheinlichkeiten ran. Dabei gilt:

Hierbei: 1_V: Sieg gegen Vater
0_V: Niederlage gegen Vater
1_M: Sieg gegen Mutter
0_M: Niederlage gegen Mutter

$$\boxed{\begin{array}{l} P(1_V)=q \\ P(1_M)=p \end{array}}, \quad \begin{array}{l} P(0_V) = P(S_V^c) = 1-P(1_V) = 1-q \\ P(0_M) = P(S_M^c) = 1-P(1_M) = 1-p \end{array} \Bigg\} \text{ und: } \boxed{p = P(1_M) > P(1_V) = q}$$

Baumdiagramm (für beide Varianten parallel):





V-M-V	M-V-M
günstige Ergebnisse für Karl!	günstige Ergebnisse für Karl!
Ereignis A: „Erfolg für Karl"	Ereignis A: „Erfolg für Karl"
$A=\{1_V1_M1_V,\ 1_V1_M0_V,\ 0_V1_M1_V\}$	$A=\{1_M1_V1_M,\ 1_M1_V0_M,\ 0_M1_V1_M\}$
Einzelergebnisse	Einzelergebnisse
$\Rightarrow P(A)=P(\{1_V1_M1_V\})+P(\{1_V1_M0_V\})+P(\{0_V1_M1_V\})$	$\Rightarrow P(A)=P(\{1_M1_V1_M\})+P(\{1_M1_V0_M\})+P(\{0_M1_V1_M\})$
$=q^2p+qp(1-q)+(1-q)pq$	$=p^2q+pq(1-p)+(1-p)qp$
$=q^2p+2pq(1-q)=pq(\underbrace{q+2(1-q)}_{=2-q})$	$=p^2q+2pq(1-p)=pq(\underbrace{p+2(1-p)}_{=2-p})$
$=pq(2-q)$	$=pq(2-p)$

Offensichtlich gilt: $p>q \Rightarrow 2-p<2-q \Rightarrow \underbrace{pq(2-p)}_{\text{Variante 2}}<\underbrace{pq(2-q)}_{\text{Variante 1}}$

$\Rightarrow$ Karl sollte sich für die Strategie „V-M-V" entscheiden und nicht für „M-V-M"!

ENDE der Vorlesung!