Vorlesung vom 24.01.13

- **Definition Zufallsgröße/Variable:**

Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt (fast) jede Abbildung

$$\boxed{\begin{aligned} X: \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}}$$

Zufallsgröße bzw. Zufallsvariable.

Ergebnis aus Ω — reelle Zahl

Dann interessieren die Ereignisse

$$\boxed{\{X=x\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} = X^{-1}(x)} \subseteq \Omega$$

Urbildmenge zur Zahl $x \in \mathbb{R}$

spezielle Ereignisse!!

genauer: alle $\omega \in \Omega$, welche unter X dasselbe „Bild" x haben

Dann kann man die Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{p_i = p(x_i) = P(\{X=x\})}$$ berechnen

Beispiel: (Ü53)

$X: \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega)$: Länge gezogenes „Wort" $\omega \in \Omega$

„Wert" von $\omega \in \Omega$ unter X = Bild von ω in $\mathbb{R}$

Analog $Y, Z: \Omega \to \mathbb{R}$ mit $Y(\omega)$: Anzahl Vokale in ω

$Z(\omega)$: Anzahl an „E's in ω

$U, V: \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$U = X + Y$, $U(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$

$V = X \cdot Z$: $V(\omega) = X(\omega) \cdot Z(\omega)$

Wertetabelle:

ω	$X(\omega)$		$Y(\omega)$	$Z(\omega)$	$U(\omega)$	$V(\omega)$
ω_1 = „DER"	3	+	1	1	4	3
ω_2 = „ZUFALL"	6	+	2	0	8	0
ω_3 = „REGIERT"	7	+	3	2	10	14
ω_4 = „DIE"	3	+	2	1	5	3
ω_5 = „WELT"	4	+	1	1	5	4

Ereignisse:

$\{X=3\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 3\}$

$= \{$„DER", „DIE"$\} \subseteq \Omega$

$\{X \le 4\} = \{X=3\} \cup \{X=4\}$

$= \{$„DER", „DIE", „WELT"$\}$

$\{Y = Z\} = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = Z(\omega)\} \subseteq \Omega$

$= \{$„WELT", „DER"$\}$

$\{U < V\} = \{\omega \in \Omega \mid U(\omega) < V(\omega)\}$
$= \{\text{„REGIERT"}\}$

$\underline{P(X=5)} = P(\{X=5\}) = \underline{0}$, $\{X=5\} = \emptyset$

Zugehörige Wahrscheinlichkeiten:

$\boxed{P(X=3)} = P(\{X=3\}) = \dfrac{|\{X=3\}|}{|\Omega|} = \boxed{\dfrac{2}{5}}$

Laplacewahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeitsverteilung für X:

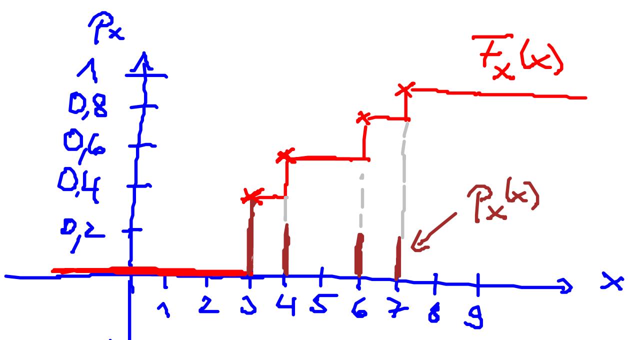
$X=x$	3	4	6	7	10
$P(X=x)$	$2/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	0
$F_X(x)$	$2/5$	$3/5$	$4/5$	$5/5=1$	1

Verteilungsfunktion:

$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} P(X=k)$

Zufallsgröße

$F_X(5) = P(X \le 5) = \underset{2/5}{P(X=3)} + \underset{1/5}{P(X=4)}$

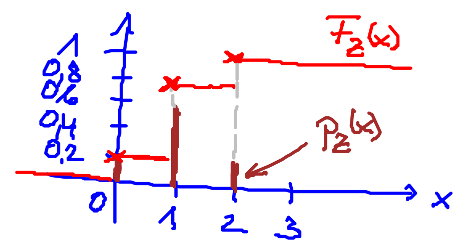


| : Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x) = P(X=x)$

| : Verteilungsfkt. $F_X(x) = P(X \le x)$

Für Z:

$Z=x$	0	1	2	3
$p_Z(x) = P(Z=x)$	$1/5$	$3/5$	$1/5$	0
$F_Z(x) = P(Z \le x)$	$1/5$	$4/5$	1	1



Ü 55 Binomialverteilung: Dem liegt ein „Bernoulli-Experiment" zugrunde!

n-stufiges Experiment = n-mal Ziehen

nur $\underline{2}$ Ergebnisse: „Erfolg" ≙ 1, „Misserfolg" ≙ 0

Zufallsgröße X mit $\underline{X: \Omega \to \{0,1\}}$

besitze die Wahrscheinlichkeit $\boxed{P(X=1) = p}$

besitze die Wahrscheinlichkeit $\boxed{P(X=0) = q = 1-p}$

einzig mögliche Ergebnisse

Einzelergebnisse sind unabhängig voneinander:

Modell: Ziehen mit Zurücklegen

Anzahl der Erfolge bei n Ziehungen: Ziehen mit Zurücklegen, aber ohne Berücksichtigung der Reihenfolge!!

z.B.: $\Omega = \{0,1\}^n = \{\omega = (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n) \mid \omega_i \in \{0,1\}\}$

z.B. $\omega = 1001101110$ $\quad n=10$
$\tilde{\omega} = 0011101011$

Zufallsgröße Anzahl der Erfolge: $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$

$X(1001101110) = X(0011101011) = 6$

$n=10$: $\underline{P(X=6)} = \frac{|\{X=6\}|}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{6}}{2^{10}} = \binom{10}{6} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}$

$= \underline{\binom{10}{6} \cdot p^6 \cdot \underbrace{q^4}_{1-p}}$

$p = 1/2$: Einzelwahrscheinlichkeit für „1"

$q = 1-p = 1/2$: Einzelwahrscheinlichkeit für „0"

Allgemeiner:

n Ziehungen mit p: Einzelerfolgswahrscheinlichkeit,

q: Einzelmisserfolgswahrscheinlichkeit

$\Longrightarrow \boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$ ← Das ist die Binomialverteilung $P_X(k)$!!

k Erfolge bei n Versuchen

Zu Ü(55): Aufgabenstellung zeigt, dass ein Bernoulliexperiment vorliegt. Es geht (bei der Maschine) um ein $n=10$-stufiges Experiment (= 10-maliges Ziehen), wobei die Einzelergebnisse unabhängig voneinander sind (= Ziehen mit Zurücklegen). Dabei ist die Misserfolgswahrscheinlichkeit $p>0$, die Erfolgswahrscheinlichkeit $q=1-p$. Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Serie von n produzierten Stücken genau k Ausschussteile darunter sind, beträgt, wenn X als Zufallsgröße die Anzahl der Ausschussteile „misst":

Achtung! Es wird die Anzahl der Misserfolge „gezählt" (= Ausschuss)!

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

Binomialverteilung!!

X misst Anzahl der Misserfolge!

$\binom{n}{k}$: Anzahl an Möglichkeiten, bei n Ziehungen k-mal eine „0" zu ziehen.

$p^k \cdot q^{n-k}$: Wahrscheinlichkeit für ein konkretes Ergebnis, bestehend aus k mal „0" und (n-k)-mal „1"

Das interessierende Ereignis $K(p)$ für den Kauf der Maschine lautet:

$K(p) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$$= \underbrace{\binom{10}{0}}_{1} \cdot p^{0} \cdot q^{10} + \underbrace{\binom{10}{1}}_{10} \cdot p^{1} \cdot q^{9}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot q^{10} + 10 \cdot p \cdot q^{9} = \underline{(q+10p) \cdot q^{9}}$$

Jetzt die konkrete Tabelle für $p = 0{,}1$ bis $p = 0{,}5$ in $\frac{1}{10}$-Schritten!!

p	q	q^9	$q+10p$	$K(p)$
0,1	0,9	0,3874...	1,9	0,736 ≙ 73,6%
0,2	0,8	0,1342...	2,8	0,3758 ≙ 37,6%
0,3	0,7	0,0403...	3,7	0,1493 ≙ 14,9%
0,4	0,6	0,01007...	4,6	0,0464 ≙ 4,6%
0,5	0,5	0,00195...	5,5	0,0107 ≙ 1,1%

hohe Wahrscheinlichkeit für Kauf der Maschine!

ENDE der Vorlesung!