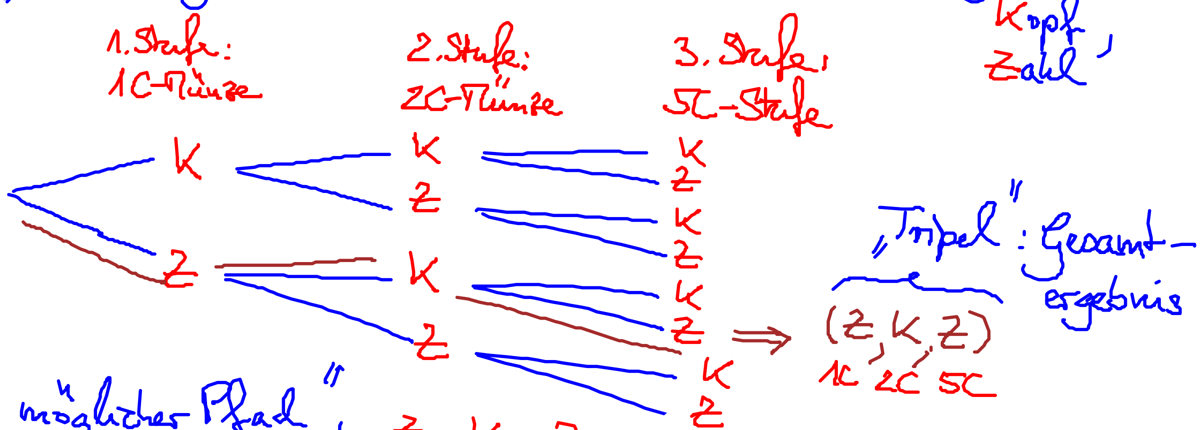
Vorlesung vom 22.11.2012

(L23): Ω sei ein gegebener bzw. gewählter Grundraum für ein sogenanntes Zufallsexperiment bzw. eine Stichprobenerhebung.
Ω heißt auch Ergebnis- oder Ereignisraum und umfasst die Gesamtheit aller möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments bzw. einer Stichprobenerhebung.

Experiment: Werfe 3 verschiedene Münzen (= 3-stufiges Experiment)

„Baumdiagramm":

mögliches Einzelergebnis: Kopf, Zahl



Ein möglicher „Pfad": Z – K – Z

Man kann solche Ergebnisse auch kodieren, wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} W/K \to 1 \\ Z \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (Z,K,Z) \to 010$$

a) Wir erhalten damit als Grundraum:

kartesisches Produkt!!

$$\boxed{\Omega = \{(K,K,K);\ (K,K,\underset{5C}{Z});\ (K,Z,K);\ (K,Z,Z);\ (Z,K,K);\ (Z,K,Z);\ (Z,Z,K);\ (Z,Z,Z)\}}$$

In der Aufgabenstellung „W" statt „K"

bzw. $\boxed{\Omega = \{\underbrace{000}_{\hat{=}(Z,Z,Z)}, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}} = \{0,1\}^3$??

$= M \times M \times M$ für $M = \{0,1\}$

(i) $A = \{(K,K,K);\ (K,K,Z);\ (K,Z,K);\ (K,Z,Z)\}$

bzw. $\boxed{A = \{100, 101, 110, 111\}} \subseteq \Omega$

ist Teilmenge

(ii) $B = \{(K,K,K); (Z,Z,Z)\}$ bzw. $\boxed{B = \{000, 111\}}$

(iii) $C = \{(K,K,K); (K,K,Z); (K,Z,K); (Z,K,K)\}$ bzw. $\boxed{C = \{011, 101, 110, 111\}}$

Bemerkung: Falls z.B. D alle Ergebnisse aus Ω bis auf z.B. (K,Z,Z) umfasst, dann kann man auch schreiben:

Elemente in Ω = mögliche Ergebnisse $\omega \in \Omega$

$D = \Omega \setminus \underbrace{\{(K,Z,Z)\}}_{\text{ist Menge}}$

„ohne"

„\" ist Mengenoperation!!

b) $\boxed{A^c = \Omega \setminus A = \{000, 001, 010, 011\}}$ heißt: 1. Wurf (1C-Münze) ist Zahl.

$\boxed{B^c = \Omega \setminus B = \{001, 010, 011, 100, 101, 110\}}$

$A \cup B = \{000, 100, 101, 110, 111\}$

⋮

$(A^c \cap B) \cup C = \boxed{(\{000, 001, 010, 011\} \cap \{000, 111\})} \cup \{011, 101, 110, 111\}$

$= \boxed{\{000\}} \cup \{011, 101, 110, 111\} = \{000, 011, 101, 110, 111\}$

$(A^c \cap B) \cap \underbrace{C^c}_{= \Omega \setminus C} = \{000\} \cap \{000, 001, 010, 100\} = \{000\}$

Für die Hausaufgabe 24 benötigen wir den Begriff σ-Algebra:

3 Bedingungen für diese σ-Algebra $\mathcal{S}$ müssen gelten:

3 Bedingungen*

1) $\Omega \in \mathcal{S}$ (Ω gehört dazu)
2) $A \subseteq \Omega$, $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{S}$
3) $A, B \subseteq \Omega$, $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$

Achtung: $\mathcal{S}$ ist ein „System" von Mengen, d.h. eine Menge, deren Elemente wiederum Mengen sind.

Folgerung: Es gilt auch: $\boxed{A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow \underbrace{A \cap B}_{=(A^c \cup B^c)^c} \in \mathcal{S}}$

Für H24 bedeutet das:

Beschreibe Ω, A, B. Dann: $A^c, B^c, A \cup B, A \cap B, A^c \cup B, A^c \cap B, A \cup B^c, A \cap B^c$

Zur „Hierarchie" in der Mengenlehre:

Stufe 0: Objekte = Elemente $a, b, \ldots, \omega$ etc.; Vergleich auf dieser Stufe nur möglich: $a = b$, $a \neq b$

Stufe 1: Objekte = Mengen $A, B, \ldots, \Omega$ etc.; Vergleich auf dieser Stufe nur möglich: $A = B$, $A \neq B$, $A \subseteq B$, $A \not\subseteq B$

Stufe 2: Objekte = Mengensysteme $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{S}, \mathcal{O}, \mathcal{T}$ etc.; Vergleich auf dieser Stufe nur möglich: $\mathcal{S} = \mathcal{A}$, $\mathcal{S} \neq \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$, $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{S}$

Zwischen benachbarten Stufen ist „$\in$" bzw. „$\notin$" sinnvoll/zugelassen.

Also z.B.: $\underset{\text{Stufe 0}}{\omega} \in \underset{\text{Stufe 1}}{A}$, $B \in \underset{\text{Stufe 2}}{\mathcal{S}}$

Aber: $\underset{\text{Stufe 0}}{\omega} \in \underset{\text{Stufe 2}}{\mathcal{S}}$, $a \notin \mathcal{T}$ macht keinen Sinn,

$\underset{\text{Stufe 1}}{\{\omega\}} \in \mathcal{S}$, $\{a\} \notin \mathcal{T}$ hingegen schon.

In Übersicht:

Stufe 2:	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \ldots$	$\leftrightarrow =, \neq, \subseteq, \not\subseteq$	
			$\in, \notin$
Stufe 1:	$A, B, C \ldots$	$\leftrightarrow =, \neq, \subseteq, \not\subseteq$	
			$\in, \notin$
Stufe 0:	a, b, c	$\leftrightarrow =, \neq$	

~~$\in$~~

ENDE der Vorlesung !!!