(Weihnachts-)Vorlesung vom 20.12.12:

Zum Binomialkoeffizienten: Er steht für die Anzahl an Möglichkeiten aus einer Menge von n verschiedenen Objekten/Elementen eine k-elementige Teilmenge herauszugreifen – zumindest im Fall $\binom{n}{k}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$.

Anders ausgedrückt: $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der verschiedenen k-elementigen Teilmengen in einer n-elementigen Menge.

Daher: $\binom{n}{0} = 1$, da die einzige 0-elementige die leere Menge ist und stets Teilmenge jeder beliebigen anderen Menge ist.

$\binom{n}{n} = 1$, da die einzige n-elementige Teilmenge einer Menge A mit n Elementen A selbst ist.

$\binom{n}{1} = n$, da es n Elemente gibt, die jeweils als 1-elementige Teilmenge „verpackt" werden können.

$\binom{n}{n-1} = n$, da die $(n-1)$-elementige Teilmenge durch Herausgreifen eines der n Elemente entsteht. Dafür gibt es also n Möglichkeiten.

Allgemein (Zwillingseigenschaft der BK):

$$\boxed{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}}$$

greife k Kugeln aus n Elementen heraus, dann bleiben n-k Kugeln übrig, also eine (n-k)-elementige Teilmenge

z.B.: $\binom{2001}{1998} = \binom{2001}{3} = \frac{\cancel{2001}^{667} \cdot \cancel{2000}^{1000} \cdot 1999}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 667 \cdot \overbrace{(2000-1)}^{1999} \cdot 1000$

$= (1334000 - 667) \cdot 1000$

$= 1333333.000$

$1998 + 3 = 2001$

Verallgemeinerter Binomialkoeffizient:

$$\boxed{\binom{3}{4}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \boxed{0}$$

$$\boxed{\binom{-1}{3}} = \frac{(-1)\cancel{(-2)}^{-1}\cancel{(-3)}^{-1}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = \boxed{-1}$$

$\alpha = \frac{3}{2}$: $\binom{3/2}{3} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{16}$

Anwendung der Binomialkoeffizienten tritt häufig in Verbindung mit der Frage auf: Wieviele Möglichkeiten gibt es, k ununterscheidbare Elemente auf n Plätze zu verteilen? ← ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, in der die einzelnen Elemente verteilt werden.

Verteile s Einsen „1" auf n Plätze

$$\overbrace{\underbrace{1\ \_\ \_\ \_\ \_\ 1\ 1\ \_}_{n \text{ Plätze}}}^{s=3}$$

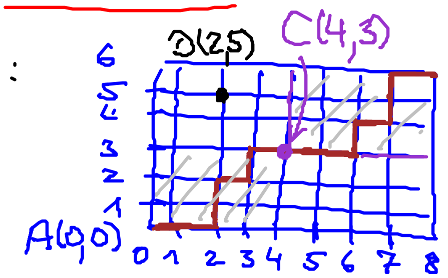
$\binom{n}{s}$ Möglichkeiten!

Falls A das Ereignis „Auf den 1. Platz landet eine „1"" ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit $P(A)$?

Antwort: $|\Omega| = \binom{n}{3}$ z.B. (3 Einsen insgesamt),
$|A| = \binom{n-1}{2}$, denn der 1. Platz ist schon durch eine „1" besetzt.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}} = \frac{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}}{1\cdot\cancel{2}}\cdot\frac{1\cdot\cancel{2}\cdot 3}{n\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}} = \frac{3}{n}$$

Tipp zu H42:



Stichprobenraum = Menge aller möglichen kürzesten Pfade ω

Ein Weg ω als Beispiel:
Sei „0": Schritt nach rechts,
„1": Schritt nach oben

$$\omega = \underbrace{00110100010110}_{14 = 8+6 \text{ Schritte}}$$

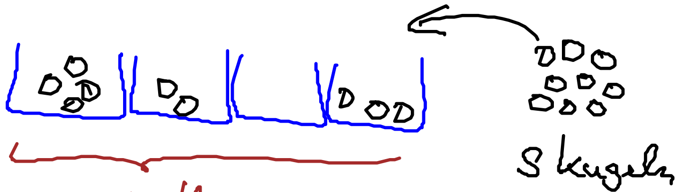
wobei „1" an 6 Stellen auftritt.

Mathematisch: $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{14}) \in \{0,1\}^{14}$ mit $\sum_{i=1}^{14} \omega_i = 6$

$P(F) = 1 - P(F^c)$, $P(E \cup F^c) = ?$

Zum Modell „Ziehen mit Zurücklegen, aber ohne Berücksichtigung der Reihenfolge":
Dual dazu: Verteilen von s ununterscheidbaren Kugeln auf n Urnen, wobei eine Urne mehrfach belegt werden kann.

Graphisch:



0000|00| |000 $\rightarrow$ 000010011000 || Länge: $n+s-1$

↑ leere Urne

$s=9$, $n=4$

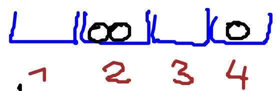
$n-1$ mal „1" für Urnentrennung

s mal „0" für die Kugeln.

1. Urne leer genau dann, wenn das Wurfergebnis ω mit $\underline{1}$ beginnt

100110 $\qquad$ 3x „1" = 4 Urnen

leere Urne



Anzahl der Möglichkeiten, s Kugeln auf n Urnen zu verteilen:

$$\boxed{\binom{n+s-1}{s} = \binom{n+s-1}{n-1}}$$

Länge des kodierten Ergebnisses

Summe $= n+s-1$ (oben!)

Achtung, Zwilling!

Zu Ü 41: Dadurch sollen die 9 Kaninchen (Kugeln?) auf 3 Käfige (Urnen?) verteilt werden.

a) Modell: $s=9$ Ziehungen aus einer Urne mit 3 Kugeln (=numerierte Käfige)

Jedes Kaninchen zieht sich quasi seinen Käfig *).

Prinzipiell Ziehung mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge. $|\Omega| = n^s = 3^9 = 19.683$

*) Duales Modell: $s=9$ unterscheidbare Kaninchenkugeln werden zufällig auf $n=3$ Käfigurnen verteilt!!

(i) In jeden Käfig kommen genau 3 Kaninchen.

Überlegung: Man könnte dafür drei hintereinander folgende Ziehungen aus der n=9 elementigen Kaninchenmenge einer jeweiligen k=3 elementigen Teilmenge (Stichprobe) durchführen.

Anzahl der Möglichkeiten: $\underbrace{\binom{9}{3}}_{\text{1. Käfig}} \cdot \underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{2. Käfig}} \cdot \underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{3. Käfig}} = \frac{\cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}} \cdot 1 = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{1680}$

Dann ergibt sich z.B. als Wahrscheinlichkeit P(A) für das Ereignis A: „Bei der zufälligen Verteilung landen in jedem Käfig genau 3 Kaninchen":

$$P(A) = \frac{\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}}{3^9} = \frac{\cancel{1680}^{560}}{\cancel{3^9}^{3^8}} = \frac{560}{6561} = 0{,}08535\ldots < 0{,}086 \mathrel{\hat=} 8{,}6\%$$

(ii) In jeden Käfig kommen mindestens 2, aber höchstens 4 Kaninchen.

Achtung: Dieser Fall schließt die Aufteilung 3-3-3 mit ein.

Denkbar sind nur noch die Fälle

2-3-4, 2-4-3, 3-2-4, 3-4-2, 4-2-3, 4-3-2

als Aufteilung auf die 3 (numerierten) Käfige. Es handelt sich hierbei um $\boxed{n! = 3! = 2 \cdot 3 = 6}$ Käfigpermutationen.

Bleibt die Frage, wieviele Möglichkeiten sich für jede dieser 6 Käfigkonstellationen ergibt?

Am Beispiel $\boxed{\underset{k_1}{2}-\underset{k_2}{3}-\underset{k_3}{4}}$ rechnen wir das analog zu (i) durch.

$$\underbrace{\binom{9}{2}}_{\substack{\text{1. Käfig mit}\\ \text{2 Kaninchen}}} \cdot \underbrace{\binom{7}{3}}_{\substack{\text{2. Käfig mit}\\ \text{3 Kaninchen}}} \cdot \underbrace{\binom{4}{4}}_{\substack{\text{3. Käfig mit den}\\ \text{restlichen K.}}} = \frac{9 \cdot \cancel{8}^{4} \cdot 7 \cdot \cancel{6}^{1} \cdot 5}{\cancel{2}_{1} \cdot \cancel{2}_{1} \cdot \cancel{3}_{1}} = \boxed{1260}$$

Gesamtanzahl an Möglichkeiten:

$$\underbrace{\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}}_{1680} + \underbrace{3!}_{6} \cdot \underbrace{\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4}}_{1260} = 1680 + 6 \cdot 1260 = \boxed{9240}$$

(iii) kein Käfig soll leer sein.

Wir betrachten das Komplementärereignis, dass mindestens ein Käfig leer bleibt.

α) 2 Käfige leer, einer voll: 3 Möglichkeiten

β) 1 Käfig leer, die anderen nicht: 3 Konstellationen 0–x–x, x–0–x, x–x–0

Käfig leer

Als Beispiel $\boxed{0-x-x}$ mit Käfig 1 leer, aber 2, 3 nicht leer.

Gesamtmöglichkeiten, 2 Käfige mit 9 Kaninchen zu besetzen: $2^9 = 512$. Davon unzulässig, da ein weiterer Käfig dann leer, 2, nämlich 0–9 und 9–0.

Insgesamt: $3 \cdot (2^9 - 2)$ Möglichkeiten.

Gesamtanzahl aus α), β):

$$3^9 - 3 - 3\cdot(2^9-2) = 3(3^8-1) - 3\cdot 2\,(2^8-1)$$

$$= 3\cdot 6560 - 6\cdot 255 = 19.680 - 1530 = 18.150$$

alle möglichen Belegungen

b) Modell: Prinzipiell $s = 9$ Ziehungen aus einer Urne mit $n = 3$ Kugeln mit Wiederholung, aber ohne Berücksichtigung der Reihenfolge!!

(i) keine Einschränkung:

Idee: Man verteilt zufällig $s = 9$ unterscheidbare Kugeln auf $n = 3$ Urnen. Dann gilt für die Anzahl der Verteilungen:

$$\binom{n+s-1}{s} = \binom{3+9-1}{9} = \binom{11}{9} = \binom{11}{2} = \frac{11\cdot \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}_{1}} = 55$$

Gesamtanzahl an Möglichkeiten

Zwillinge!

(ii) kein Käfig leer:

Idee: Packe die ersten 3 Kaninchen in jeweils einen Käfig für sich. Dann ist kein Käfig mehr leer. Dann bleiben $s = 6$ Kaninchen übrig, die beliebig auf die 3 Käfige verteilt werden können.

Anzahl an Möglichkeiten:

Zwillinge

$$\binom{n+s-1}{s} = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = \frac{\cancel{8}^{4}\cdot 7}{\cancel{2}_{1}} = 28$$

(iii) kein Kaninchen allein, kein Käfig leer:

Also müssen alle Käfige mit mindestens 2 Kaninchen belegt sein. Das ergibt bei „Vorverteilung" nur noch $s = 9 - 3 \cdot 2 = 3$ übrig gebliebene Kaninchen, die willkürlich auf die $n = 3$ Käfige verteilt werden dürfen.

Anzahl an Möglichkeiten:

Zwillinge

$$\binom{n+s-1}{s} = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}} = 10$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Verteilung der $s = 9$ unterscheidbaren Kaninchen auf $n = 3$ Käfige genau dieses Ereignis A eintrifft, ergibt sich:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{11}{9}} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{55}_{11}} = \frac{2}{5} \mathrel{\hat{=}} 40\%$$

(iii) $\rightarrow |A|$, (i) $\rightarrow |\Omega|$

Allen Teilnehmern frohe Festtage und einen guten Start ins neue Jahr 2013 !!!

ENDE der Übung !