Vorlesung vom 17.01.2013:

Thema: Bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Außerdem: Noch einmal Formel von Bayes sowie Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

---

Seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. Die bedingte Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung / Voraussetzung / Hypothese B ist definiert als

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}\ , \text{ falls } P(B) \neq 0.$$

„unter der Bedingung"

Daraus folgt:
$$\boxed{P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)}$$

Damit wegen $A \cap B = B \cap A$: $\underline{P(B|A) \cdot P(A)} = P(B \cap A) = \underline{P(A|B) \cdot P(B)}$

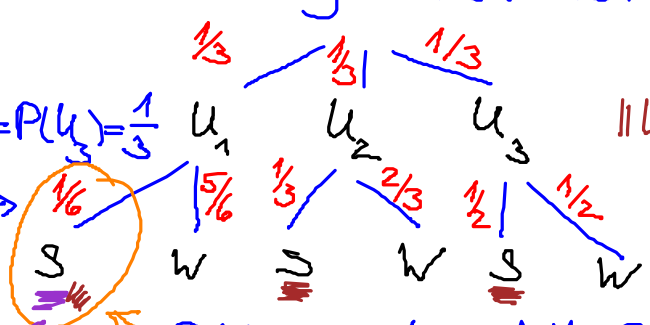
$$\Longrightarrow \boxed{P(B|A) = \frac{P(A|B)}{P(A)} \cdot P(B)}$$

B unter der Voraussetzung A

A unter der Voraussetzung B

Z.B.: H36

Baumdiagramm zur Ziehung



$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$

// Urnenwahl

// Kugelziehung

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$P(S|U_1) = 1/6$ „Wahrscheinlichkeit, schwarz zu ziehen unter der Bedingung, dass Urne U_1 vorliegt!!

Zweig des Baumdiagramms liefert:
$$\boxed{P(U_1) \cdot P(S|U_1) = P(U_1 \cap S)}$$
$$1/3 \cdot = 1/6 \quad = 1/18$$

Ich suche die Wahrscheinlichkeit

Frage: Was ist $P(U_1 | S) = ?$ dafür, dass unter der Bedingung, dass eine schwarze Kugel gezogen wurde, diese gerade aus U_1 stammt!!

Es gilt: $\boxed{P(U_1|S) = \frac{P(S|U_1)}{P(S)} \cdot P(U_1)}$

$$= \frac{1/6}{??} \cdot 1/3 \qquad \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \to ??$$

Bleibt die Frage nach $P(S)$, die wir in H36 als $P(S) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ bestimmt haben:

disjunkt $A \cap B = \emptyset$

$$S = S \cap \Omega = S \cap (U_1 \cup U_2 \cup U_3) = (S \cap U_1) \cup (S \cap U_2) \cup (S \cap U_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(S)} = P(S \cap U_1) + P(S \cap U_2) + P(S \cap U_3)$$

„totale" Wahrscheinlichkeit für S.

3 Pfade im Baumdiagramm, die auf „S" führen!!

$$= P(S|U_1) \cdot P(U_1) + P(S|U_2) \cdot P(U_2) + P(S|U_3) \cdot P(U_3)$$

$$= 1/6 \cdot 1/3 + 2/6 \cdot 1/3 + 3/6 \cdot 1/3 = \frac{1+2+3}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Also zusammen: $\boxed{P(U_1|S) = \frac{1/6}{1/3} \cdot 1/3 = 1/6}$

Analog ergibt sich: $P(U_2|S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(U_3|S) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Zur Formel $P(A|B) = \frac{P(B|A)}{P(B)} \cdot P(A)$ siehe Ü49

Ereignisse: M: „Eine zufällig ausgewählte Person hat Marihuana geraucht."

H: „Eine zufällig ausgewählte Person ist heroinabhängig."

Erkenntnis: $P(H|M) = \frac{P(H \cap M)}{P(M)}$ oder $\boxed{P(M|H) = \frac{P(H \cap M)}{P(H)}}$ ✓ z.

Statistik zeigt: $P(M|H) \approx 1 \quad (<1)$

Schlussfolgerung des Innenministers:

$$P(H|M) \approx P(M|H) \approx 1 \quad ↯$$

Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der früher Marihuana geraucht hat, nun heroinabhängig ist

Aber: $\boxed{P(H|M)} = \frac{P(M|H)}{P(M)} \cdot P(H) \approx \boxed{\frac{1}{P(M)} \cdot P(H)} \ll 1$

sehr klein im Verhältnis zu 1!!

Also Schlussfolgerung nicht korrekt!

Unabhängigkeit von Ereignissen:

2 Ereignisse A, B heißen (stochastisch) unabhängig, falls

$$\boxed{P(A|B) = P(A)} \text{ bzw. } \boxed{P(B|A) = P(B)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(A\cap B) = \underbrace{P(A|B)}_{=P(A)} \cdot P(B) = P(A)\cdot P(B)}$$

Ü47 Wir beweisen die „Testformel":

$ad - bc = 0 \Leftrightarrow$ Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig

genau dann, wenn

$A = F$: „Person ist weiblich", $A^c = F^c$: „Person ist männlich"

$B = R$: „Person ist Raucher/in", $B^c = R^c$: „Person ist Nichtraucher/in."

Tabelle:

	$A=F$	$A^c=F^c$	Σ
$R=B$	200	600	800
$R^c=B^c$	100	300	400
Σ	300	900	1200

$a = 200,\ b = 600,\ c = 100,\ d = 300$

$\Rightarrow ad - bc = \underbrace{60.000}_{200\cdot 300} - \underbrace{60.000}_{600\cdot 100} = 0$

z.B.: $P(A|R) = \frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{200}{800} = \frac{1}{4} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{300}{1200} = P(A)$

In der allgemeinen Tabelle gilt:

$$P(A\cap B) = \frac{a}{n} = \frac{a}{a+b+c+d} = \frac{|A\cap B|}{|\Omega|}$$

$$P(A) = \frac{a+b}{n},\quad P(B) = \frac{a+c}{n} \Rightarrow P(A)\cdot P(B) = \frac{(a+b)(a+c)}{n\cdot n}$$

Also: $P(A\cap B)=\frac{a}{n}\overset{!!}{=}P(A)\cdot P(B)=\frac{(a+b)(a+c)}{n^2}$

Unabhängig!!

$$\overset{\cdot n^2}{\iff}\quad a\cdot n\overset{!!}{=}(a+b)(a+c)=\cancel{a^2}+\cancel{ab}+\cancel{ac}+bc$$

$$a(a+b+c+d)=\cancel{a^2}+\cancel{ab}+\cancel{ac}+ad$$

$$\iff ad=bc\iff ad-bc=0$$

Hier noch Aufgabe

Ü51 a) Die Ereignisse, die betrachtet werden, sind

RR: „Die gezogene Karte ist beidseitig rot",

SS: „Die — " — schwarz",

RS: „Die — " — auf der einen Seite rot, auf der anderen schwarz".

R_o: „Oberseite der gezogenen Karte ist rot",

R_u: „Unterseite — " — rot",

S_u: „ — " — schwarz".

Zu berechnen sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten

Anna gewinnt! $\rightarrow$ $\underbrace{P(S_u|R_o)}$ und $P(R_u|R_o)$. ← Franz gewinnt.

Da im Fall einer roten Oberseite S_u gleichbedeutend mit RS und R_u gleichbedeutend mit RR ist, rechnen wir:

$$P(S_u|R_o)=P(RS|R_o)=\frac{P(RS\cap R_o)}{P(R_o)}=\frac{P(R_o|RS)\cdot P(RS)}{P(R_o)}$$

Dabei gilt (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit):

$$P(R_o) = P(R_o|RR)\cdot P(RR) + P(R_o|RS)\cdot P(RS) + P(R_o|SS)\cdot P(SS)$$
$$= 1 \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} + 0\cdot\tfrac{1}{3}$$
$$= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(S_u|R_o) = \frac{P(R_o|RS)\cdot P(RS)}{P(R_o)} = \frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot\tfrac{1}{3}}{\cancel{\tfrac{1}{2}}} = \frac{1}{3}}$$

Analog: $\boxed{P(R_u|R_o) = \frac{P(R_o|RR)\cdot P(RR)}{P(R_o)} = \frac{1\cdot\tfrac{1}{3}}{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{3}}$

Also: $\boxed{P(S_u|R_o) : P(R_u|R_o) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2} = 1:2}$

Wette ist unfair. Franz hat doppelt so hohe Gewinnwahrscheinl. wie Anna.

b) Neues Ereignis: R_G: „Die gezogene Karte besitzt mindestens eine rote Seite",
R_1: „Die gezogene Karte besitzt nur genau eine schwarze Seite, ist also RS",
R_2: „Die gezogene Karte besitzt zwei rote Seiten, ist also RR".

Bedingte Wahrscheinlichkeiten:

Beachte: $RS \cap R_G = RS$, da im Eintreten von RS das Ereignis „R_G" automatisch erfüllt ist!

Anna gewinnt!

$$\boxed{P(R_1|R_G)} = P(RS|R_G) = \frac{P(RS\cap R_G)}{P(R_G)}$$
$$= \frac{P(RS)}{P(R_G|RR)\cdot P(RR) + P(R_G|RS)\cdot P(RS) + P(R_G|SS)\cdot P(SS)}$$

sicheres Ereignis unter der Bedingung!!

$$= \frac{1/3}{1\cdot 1/3 + 1\cdot 1/3 + 0\cdot 1/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Analog: $\boxed{P(R_2|R_G)} = P(RR|R_G) = \frac{P(RR\cap R_G)}{P(R_G)} = \frac{P(RR)}{P(R_G)} = \frac{1/3}{2/3} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Franz gewinnt!

Damit gilt nun: $P(R_1|R_G) = P(R_2|R_G) = 1/2 \Rightarrow$ faire Wette!

ENDE der Vorlesung!