Vorlesung vom 13.12.2012:

Nachtrag zur Aufgabe (Ü 33): Bezeichne $(x,y,z) \in \{0,1\}^3$ den aktuellen Zustand der Pflanzen x,y,z mit „0": gesund, „1": erkrankt.

Sei A_y das Ereignis „y ist erkrankt". Baumdiagramm

$\frac{1}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ — $(1,0,0)$ $\xrightarrow{1/5}$ $(1,1,0)$: x erkrankt, y,z gesund, x steckt y an: $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{40}$

$\frac{1}{2}$ — $(?,1,?)$ umfasst $(0,1,0)$; $(1,1,0)$; $(0,1,1)$; $(1,1,1)$: „y erkrankt direkt" d.h. ohne „Einfluss" der Nachbarpflanzen: $4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ — $(1,0,1)$ $\xrightarrow{(*)}$ $(1,1,1)$: x,z erkrankt, y gesund, x oder z stecken y an: $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{25}\right)\cdot\frac{1}{8} = \frac{9}{25}\cdot\frac{1}{8} = \frac{9}{200}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ — $(0,0,1)$ $\xrightarrow{1/5}$ $(0,1,1)$: z erkrankt, x,y gesund, z steckt y an: $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{40}$

$(1,0,0)$: x erkrankt, y,z bleiben gesund

$(0,0,0)$: alle Pflanzen bleiben gesund

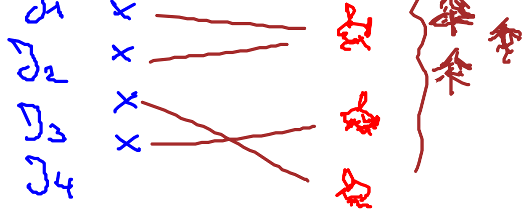
$(*) = P(A_x \cup A_z)$ mit A_x: „y wird von x infiziert", A_z: „y wird von z infiziert".
„oder" bzw. „vereinigt"
$= ?$

$(*) = P(A_x \cup A_z) = P(A_x) + P(A_z) - P(A_x \cap A_z)$ (Infektion durch x und z simultan)
$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}$
$= \frac{2}{5} - \frac{1}{25}$

Insgesamt ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit $P(A_y)$, dass y erkrankt:

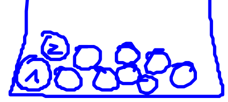
$$P(A_y) = \frac{1}{40} + \frac{1}{2} + \frac{9}{200} + \frac{1}{40}$$
$$= \frac{25+500+45+25}{1000} = \frac{595}{1000} = 0{,}595$$

Aufgabe 39 als „Urnenmodell":



A: „Es werden genau 4 (verschiedene) Hasen fotografiert."

Urnenmodell: Jeder Jäger wählt sich seinen eigenen Hasen

n Hasen → 
$= n$ Kugeln

„Hasenurne"

$s=4$: Anzahl Ziehungen
Keine Wiederholung bei der Hasenwahl. Ergebnisse $\boxed{\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)}$ mit $\omega_i \in \{1,\dots,n\}$ ist der von J_i „gezogene" Hase.

Wieviele Möglichkeiten, d.h. „Einzelergebnisse" in A gibt es?

$$\boxed{|A| = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)(n-3)} = \frac{n!}{(n-4)!} = (n)_4$$ „Variationen ohne Wiederholung"

$$J_1 \quad J_2 \quad J_3 \quad J_4$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}\cdot p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^4}\cdot p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4}$$

Grundraum $\Omega = \{\omega=(\omega_1,\dots,\omega_4) \mid \omega_i \in \{1,\dots,n\}\} = \{1,\dots,n\}^4$

Modell: Variationen mit Wiederholung $\Longrightarrow \boxed{|\Omega| = n\cdot n\cdot n\cdot n = n^4 = n^s}$

B: „Alle Jäger suchen denselben Hasen aus und Hase wird ‚treffsicher' von einem der 4 Jäger (jeweils) fotografisch getroffen."

$$B = \{\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) \mid \omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_4\} = \{\underbrace{(1,1,1,1)}_{=\omega};\dots;\underbrace{(n,n,n,n)}_{\tilde{\omega}}\} \subseteq \Omega$$

$\Longrightarrow |B| = n$; was aber ist die Einzelwahrscheinlichkeit $P(B_k)$ für B_k: „In der Konstellation $\omega=(k,k,k,k)$ wird Hase k fotographisch von einem der Jäger getroffen"?

Hase „k" 4-mal ausgewählt!

Zugang wäre z.B. die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass J_1 trifft, aber J_2 bis J_4 nicht?

$$\tilde{p} = p_1\cdot(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)$$

Wahrscheinlichkeit, dass J_2 nicht trifft (= Gegenwahrscheinlichkeit)

Schlüssel: Wir betrachten das „Gegenereignis" $J_1^c \cap J_2^c \cap J_3^c \cap J_4^c = (J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4)^c$, dass weder J_1 noch J_2 noch J_3 noch J_4 den Hasen k trifft.

Wahrscheinlichkeit: $\tilde{p} = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)$

$\Rightarrow \boxed{q = 1-\tilde{p} = 1-(1-p_1)\cdot\ldots\cdot(1-p_4)}$: Wahrscheinlichkeit, dass Hase „k" von mind. einem der Jäger getroffen wird.

$\Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}\cdot q = \frac{\cancel{n}^{1}}{n^{\cancel{4}3}}\cdot[1-(1-p_1)\cdot\ldots\cdot(1-p_4)]$

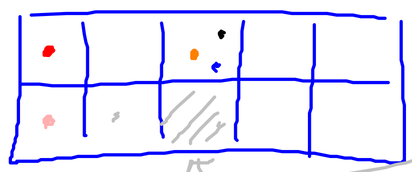
Konkret: $n = 10$ Hasen, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0{,}8 = \frac{4}{5}$.

Dann: $P(A) = \frac{\cancel{10}^{1}\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{10^{\cancel{4}3}}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{10^3}\cdot 0{,}8^4 = 0{,}206\ldots \approx 1/5$

n, 3, „p_i"

$P(B) = \frac{1}{10^3}\cdot[1-(\underbrace{1-0{,}8}_{0{,}2})^4] = \frac{1}{10^3}\cdot\underbrace{0{,}9984}_{\approx 1} = 0{,}0009984 \approx 0{,}001 = \frac{1}{10^3}$

Zu H40:



$n = 10$ Felder

Ereignis: Das schraffierte Feld bleibt „rosinenfrei" Gegenereignis!

2 Möglichkeiten der Interpretation des Urnenmodells:

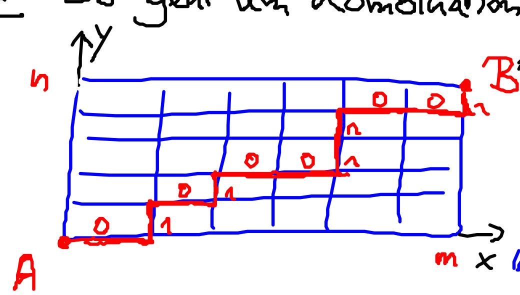
1) Für jede Rosine wird zufällig das Feld als Kugel gezogen.
Anzahl der Rosinen = Anzahl x der Ziehungen ??
Ziehungen mit Wiederholung bei Berücksichtigung der Reihenfolge
2) Verteilung von x Rosinen auf $n = 10$ Urnen, wobei eine Urne mehrfach belegbar ist!

$\Rightarrow$ Führt auf eine Ungleichung der Form

$\boxed{\underbrace{1-p^x}_{\text{Gegenereignis}} \geq 0{,}99} \Leftrightarrow \boxed{p^x \leq 1-0{,}99 = 0{,}01}$?? Logarithmus „ln"

$\Rightarrow \ln(p^x) = x\cdot\underbrace{\ln(p)}_{<0} \leq \ln(0{,}01) \Rightarrow \boxed{x \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(p)}}$

Zu H42: Es geht um Kombinationen mit Wiederholung



Straßennetz

Weg von A nach B kodieren z. B. durch „0": einmal nach rechts, „1": einmal nach oben!

$w = \underbrace{0101001100 1}_{(m+n)\ \text{Ziffern!!}}$

// **Achtung**: In diesem $(m+n)$-Tupel tauchen genau n Einsen und m Nullen auf.

Anders ausgedrückt:

Wieviele Möglichkeiten gibt es, n Einsen auf $m+n$ Stellen unterzubringen?

Antwort: $\binom{m+n}{n}$ Möglichkeiten!!

ENDE der Vorlesung!