Vorlesung vom 10.01.2013 (= die erste in diesem Jahr):

Eine Datenerhebung ergibt folgende Ergebnisse in tabellarischer Form

| | Frauen | Männer | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|
| Raucher | 200 !! | 800 | 1000 |
| Nichtraucher | 300 | 200 | 500 |
| $\Sigma$ | 500 | 1.000 | 1500 ← Stichprobengröße |

Laplace-experiment

Wir ziehen „zufällig" eine Person aus dieser Stichprobe (= Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega$ mit $|\Omega| = 1500$).

Ereignisse: $R$: „Person ist Raucher/in", $R^c$: „Person ist Nichtraucher/in"

$F$: „Person ist weiblich", $F^c$: „Person ist männlich"

Wahrscheinlichkeiten: $P(R) = \frac{|R|}{|\Omega|} = \frac{1000}{1500} = \frac{2}{3}$, $P(R^c) = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3} = 1 - P(R)$,

$P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3}$, $P(F^c) = \frac{|F^c|}{|\Omega|} = \frac{1000}{1500} = \frac{2}{3} = 1 - P(F)$

Schnitt: „und"

$P(F \cap R) = \frac{|F \cap R|}{|\Omega|} = \frac{200}{1500} = \frac{2}{15}$, $P(F \cup R) = P(F) + P(R) - P(F \cap R) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$

Vereinigung: „oder"

Erweiterte Fragestellung: Wieviele der Frauen sind „anteilmäßig" Raucherinnen? Oder wieviele Männer gibt es „anteilmäßig" unter der Raucher/innen-Gruppe?

⇝ Verhältniszahlen! Zur 1. Frage: $\frac{|F \cap R|}{|F|} = \frac{200}{500} = \frac{\frac{|F \cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|F|}{|\Omega|}} = \boxed{\frac{P(F \cap R)}{P(F)}}$

F ist der neue „Bezugs-Grundraum"!!

Bruchrechnung

$\overset{?}{=} \frac{2/15}{1/3} = \frac{2}{\cancel{15}_5} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{1} = \frac{2}{5}$ ✓

Zur 2. Frage: $\frac{|F^c \cap R|}{|R|} = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5} = \frac{P(F^c \cap R)}{P(R)} = \frac{800/1500}{1000/1500} = \frac{\cancel{800}^4}{\cancel{1500}_1} \cdot \frac{\cancel{1500}^1}{\cancel{1000}_5} = \frac{4}{5}$ ✓

$P(F^c \cap R) = \frac{|F^c \cap R|}{|\Omega|}$

⇒ Bedingte Wahrscheinlichkeit,

$\frac{P(F\cap R)}{P(F)} =: P(R|F)$ sprich: „R unter der Bedingung F"

$\frac{P(F^c\cap R)}{P(R)} =: P(F^c|R)$ sprich: „$F^c$ unter der Bedingung R"

Allgemeine Definition für bedingte Wahrscheinlichkeit:

Sind $A, B \subseteq \Omega$ zwei Ereignisse im Ereignisraum /Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega$, so heißt

$$\boxed{P(A|B) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit für „A unter der Bedingung B".

Achtung: Im allgemeinen ist $P(A|B) \neq P(B|A)$ !!

Beispielaufgabe 43: Ereignisse sind

E: „Es findet ein Einbruch statt."

$E^c$: „Es findet kein Einbruch statt."

A: „Alarmanlage gibt Signal."

$A^c$: „Alarmanlage gibt kein Signal."

Bedingte Wahrscheinlichkeiten, die gegeben sind:

1) $P(A|E) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = 0{,}99$; 2) $P(A|E^c) = 0{,}005$; 3) $P(E) = 0{,}001$.

Voraussetzung/Bedingung: „bei Einbruch"

Gesucht/gefragt ist: $P(E|A) = \frac{P(E\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\cap E)}{P(A)} = ??$

schrittweise:

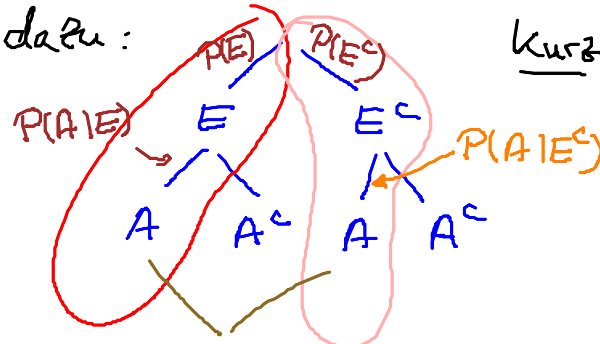
Aus 1), 3) folgt $\underline{P(A\cap E)} \overset{(1)}{=} \underset{(1)}{P(A|E)} \cdot \underset{(3)}{P(E)} = 0{,}99 \cdot 0{,}001 = 0{,}00099 = \frac{99}{10^5}$

P(A) ermitteln wir durch die totale Summenformel bzw. Formel für totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = P(A|E)\cdot P(E) + P(A|E^c)\cdot P(E^c)$$

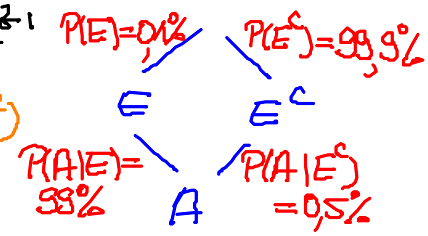
Baumdiagramm dazu:

Wichtig! →




A: Alarm!! Wahrscheinlichkeiten in diesen „Zweigen" zusammenaddieren!

Kurz:




Also:

$$\boxed{P(A)} = \underbrace{P(A|E)}_{\substack{=99\% \\ =\frac{99}{100}}}\cdot\underbrace{P(E)}_{\substack{=0{,}1\% \\ =\frac{1}{1000}}} + \underbrace{P(A|E^c)}_{\substack{=0{,}5\% \\ =\frac{5}{1000}}}\cdot\underbrace{P(E^c)}_{\substack{=1-P(E) \\ =99{,}9\% = \frac{999}{1000}}} = \frac{99}{10^5} + \frac{4995}{10^6} = \frac{990+4995}{10^6} = \frac{5985}{10^6} = 0{,}005985 \approx 0{,}6\%$$

Zuletzt:

$$\boxed{P(E|A)} = \frac{P(A\cap E)}{P(A)} = \frac{99/10^5}{5985/10^6} = \frac{99}{10^5}\cdot\frac{10^6}{5985} = \frac{990}{5985} = 0{,}1654\ldots \approx 16{,}5\%$$

$$\overset{\text{Formel}}{=} \frac{P(A|E)\cdot P(E)}{P(A|E)\cdot P(E) + P(A|E^c)\cdot P(E^c)}$$

ENDE der Vorlesung!!!

Abgabe der Hausaufgaben 8. Blatt erst übernächste Woche!!