Nachtrag zur Vorlesung vom 07.02.2013:

Hier folgt die Musterlösung der restlichen beiden Aufgaben der Probeklausur:

(4) a) Vervollständigung der Vierfeldertafel:

	Polio	kein Polio	Summe
Versuchsgruppe	33	200.712	200.745
Kontrollgruppe	115	201.114	201.229
Summe	148	401.826	401.974

1. Schritt: 2. Zeile plus 3. Spalte

2. Schritt: 1. Zeile plus 2. Spalte

3. Schritt: 3. Zeile

b) Wir formulieren als Ereignisse:

E: „Kind erkrankt an Polio", K: „Kind ist aus der Kontrollgruppe",

E^c: „Kind erkrankt nicht an Polio", K^c: „Kind ist aus der Versuchsgruppe".

(i) „Kind aus der Kontrollgruppe ist nicht an Polio erkrankt."

Bedingung ist: „Kind ist aus der Kontrollgruppe", also Ereignis K

Wir fragen nach dem Ereignis „Kind ist nicht an Polio erkrankt", also E^c

Zusammen:

$$\boxed{P(E^c \mid K)} = \frac{P(E^c \cap K)}{P(K)} = \frac{\frac{|E^c \cap K|}{|\Omega|}}{\frac{|K|}{|\Omega|}} = \frac{|E^c \cap K|}{\cancel{|\Omega|}} \cdot \frac{\cancel{|\Omega|}}{|K|}$$

$$= \frac{|E^c \cap K|}{|K|} = \frac{201.114}{201.229} = 0{,}99942\ldots \approx 0{,}9994 \mathrel{\hat=} \boxed{99{,}94\,\%}$$

(ii) „Kind aus der Versuchsgruppe erkrankt an Polio."

Bedingung ist: „Kind ist aus der Versuchsgruppe", also Ereignis K^c

Wir fragen nach dem Ereignis „Kind ist an Polio erkrankt", also E

Zusammen:

$$\boxed{P(E \mid K^c)} = \frac{P(E \cap K^c)}{P(K^c)} = \frac{\frac{|E \cap K^c|}{|\Omega|}}{\frac{|K^c|}{|\Omega|}} = \frac{|E \cap K^c|}{\cancel{|\Omega|}} \cdot \frac{\cancel{|\Omega|}}{|K^c|}$$

$$= \frac{|E \cap K^c|}{|K^c|} = \frac{33}{200.745} = 1{,}6438\ldots \cdot 10^{-4}$$

$\approx 0{,}000016 = 0{,}016\%$

c) Nun geht es um die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit $\boxed{P(K^c|E)}$. Der Satz von Bayes liefert unter Rückgriff auf die totale Wahrscheinlichkeit:

$$\boxed{P(K^c|E) = \frac{P(E|K^c)\cdot P(K^c)}{P(E)} = \frac{P(E|K^c)\cdot P(K^c)}{P(E|K^c)\cdot P(K^c) + P(E|K)\cdot P(K)}}$$

Wir haben im Nenner: $P(E|K^c) = \frac{33}{200.745}$, $P(K^c) = \frac{200.745}{401.974}$,

$$P(E|K) = \frac{|E\cap K|}{|K|} = \frac{115}{201.229}, \quad P(K) = \frac{|K|}{|\Omega|} = \frac{201.229}{401.974}$$

$$\Rightarrow P(E) = P(E|K^c)\cdot P(K^c) + P(E|K)\cdot P(K) = \frac{33}{\cancel{200.745}}\cdot\frac{\cancel{200.745}}{401.974} + \frac{115}{\cancel{201.229}}\cdot\frac{\cancel{201.229}}{401.974}$$

$$= \frac{33+115}{401.974} = \boxed{\frac{148}{401.974}} = 3{,}6818\ldots\cdot 10^{-4} \approx 0{,}00037 \mathrel{\hat=} 0{,}037\%$$

Also eingesetzt:

$$P(K^c|E) = \frac{\frac{33}{\cancel{200.745}}\cdot\frac{\cancel{200.745}}{401.974}}{\frac{148}{401.974}} = \frac{33}{\cancel{401.974}}\cdot\frac{\cancel{401.974}}{148} = \boxed{\frac{33}{148}} = 0{,}22297\ldots$$

$$\approx 0{,}223 \mathrel{\hat=} 22{,}3\%$$

Ergebnis direkt aus Vierfeldertafel:

$$P(K^c|E) = \frac{P(K^c\cap E)}{P(E)} = \frac{|K^c\cap E|}{|E|} = \frac{33}{148}$$

d) Stochastische Unabhängigkeit von E^c und K^c?

E^c und K^c sind stochastisch unabhängig, falls gilt:

$$\boxed{P(E^c\cap K^c) = P(E^c)\cdot P(K^c)}$$ Kriterium für s.U.

Wir haben: $P(E^c\cap K^c) = \frac{|E^c\cap K^c|}{|\Omega|} = \frac{200.712}{401.974} = 0{,}499315\ldots \approx 0{,}499 \mathrel{\hat=} 49{,}9\%$

$$P(E^c)\cdot P(K^c) = \frac{|E^c|}{|\Omega|}\cdot\frac{|K^c|}{|\Omega|} = \frac{401.826}{401.974}\cdot\frac{200.745}{401.974} = 0{,}499214\ldots$$

Beachte: $\boxed{P(E^c\cap K^c) = \frac{200.712}{401.974} \neq \frac{200.745\cdot 401.826}{401.974^2} = P(E^c)\cdot P(K^c)}$

Beide Werte sind eben nicht gleich, wenn auch dicht beieinander („Dicht daneben ist eben doch vorbei ...")

$$\frac{200.712}{401.974} \neq \frac{200.745\cdot 401.826}{401.974^2} \Leftarrow \cdot 401.974^2$$

$$\underbrace{200 \cdot 712 \cdot 401.974}_{8,068100\ldots\cdot 10^{10}} \neq \underbrace{200.745 \cdot 401.826}_{8,066456\ldots\cdot 10^{10}}$$

---

(5) a) Wir definieren als Zufallsvariable $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = x$ als Anzahl der Eier mit abgelaufenem Haltbarkeitsdatum in der Stichprobe ω von 200 Eiern.

Wahrscheinlichkeitsverteilung: Binomialverteilung mit $\boxed{p = 2\% = 0{,}02}$ als Einzelwahrscheinlichkeit für Erfolg: $1 \hat{=}$ „Ei hat abgelaufenes Haltbarkeitsdatum"

Dann folgt: $q = 1 - p = 0{,}98$ für Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Ei ein gültiges Haltbarkeitsdatum aufweist.

Wir berechnen: $\boxed{P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \overbrace{(P(X=0) + P(X=1))}^{= P(X \leq 1)}}$

Hier lauten die Parameter wegen 200-facher Ziehung:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad \text{mit } n = 200,\ p = 0{,}02,\ q = 0{,}98:$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \underbrace{\binom{200}{0}}_{=1} \cdot \underbrace{p^0}_{=1} \cdot q^{200} - \underbrace{\binom{200}{1}}_{=200} \cdot \underbrace{p^1}_{=p} \cdot q^{199}$$

$$= 1 - q^{200} - 200 p q^{199} = 1 - (q + 200 \cdot p) \cdot q^{199}$$

$$= 1 - \underbrace{(0{,}98 + 200 \cdot 0{,}02)}_{= 0{,}98 + 4 = 4{,}98} \cdot 0{,}98^{199} = 1 - 4{,}98 \cdot 0{,}98^{199} = 0{,}91062\ldots \approx 91{,}1\%$$

b) Jetzt werden aus einer Gesamtmenge von $N = 200$ Eiern eine zufällige Stichprobe von $n = 10$ Eiern entnommen. Es sind $r = 4$ Eier mit abgelaufenem Haltbarkeitsdatum unter den 200 Eiern

$X: \Omega_{10} \to \mathbb{R}$ mit $\underbrace{\Omega_{10} = \{E \subset \Omega \mid |E| = 10\}}_{\text{Menge aller 10-elementigen Teilmengen von } \Omega.}$ mit $|\Omega| = 200$

$X(E) = x$ misst die Anzahl an Eiern mit abgelaufenem Haltbarkeitsdatum in der 10-elementigen Stichprobe $E \in \Omega_{10}$.

Wahrscheinlichkeitsverteilung: hypergeometrische Verteilung!!

Gesucht: $\boxed{P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0)}$ ← $x=0$

mit $P(X=x) = \dfrac{\binom{r}{x}\cdot\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ und $r=4$, $n=10$, $N=200$

Konkret: $P(X=0) = \dfrac{\binom{4}{0}\cdot\binom{196}{10}}{\binom{200}{10}} = \dfrac{1\cdot\binom{196}{10}}{\binom{200}{10}} = \dfrac{1{,}8257\ldots\cdot 10^{16}}{2{,}2451\ldots\cdot 10^{16}}$

$= 0{,}81320\ldots \hat{=} 81{,}3\,\%$ ← ungefähr!

Bzw.: $\dfrac{\binom{196}{10}}{\binom{200}{10}} = \dfrac{\cancel{196\cdot195\cdot194\cdot193\cdot192\cdot191}\cdot190\cdot189\cdot188\cdot187\cdot\cancel{10!}}{\cancel{10!}\cdot200\cdot199\cdot198\cdot197\cdot\cancel{196\cdot195\cdot194\cdot193\cdot192\cdot191}}$

$= \dfrac{190\cdot189\cdot188\cdot187}{200\cdot199\cdot198\cdot197} = 0{,}8132056\ldots \approx 0{,}813 \hat{=} 81{,}3\,\%$

Zuletzt: $P(X\geq1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}813205\ldots = 0{,}18679\ldots \approx 0{,}1868 \hat{=} 18{,}68\,\%$

ENDE der Musterlösung!