Vorlesung vom 07.02.2013:

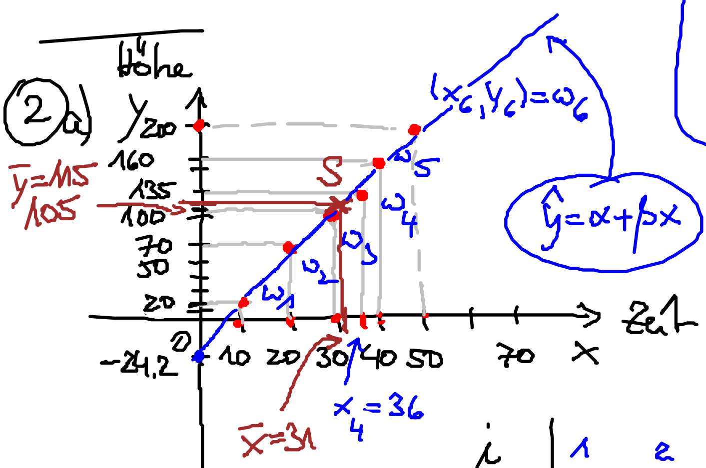
Hinweis zu Aufgabe 1, Probeklausur:

Wir (ich) verabschieden wir uns von der theoretischen Verteilungsfunktion. Also bleibt die empirische VF. Quantilermittlung für x_α funktioniert mit Indexberechnung via

$$\frac{N-1}{n} < \alpha \le \frac{N}{n} \iff \boxed{N-1 < \alpha \cdot n \le N}$$

$$\Longrightarrow \quad x_\alpha = x_{(N)} \leftarrow \text{„ordinierte" Daten!}$$

2 a)



2-dimensionales Merkmal $\underline{X}=(x,y)$ ← Zeit, ← Höhe der Pflanze

$\Omega=\{\omega=(x_i;y_i)\,|\,i=1,\dots,6\}$ Stichprobenraum

$n=6$ Daten

i	1	2	3	4	5	6	Σ (Summe)
x_i	10	20	30	36	40	50	186
y_i	20	70	105	135	160	200	690
x_i^2	100	400	900	1296	1600	2500	6796
y_i^2	400	4900	11025	18225	25600	40000	100150
$x_i y_i$	200	1400	3150	4860	6400	10000	26010

Produkt

$$\bar{x}=\frac{186}{6}=31$$

$$\bar{y}=\frac{690}{6}=115$$

Schwerpunkt: $\boxed{S=(\bar{x},\bar{y})=(31,115)}$

b) **Empirische Kovarianz:**

$$\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y})=\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right)-\bar{x}\cdot\bar{y}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 26.010-31\cdot 115=770$$

Empirischer Korrelationskoeffizient:

$$r(\underline{x},\underline{y})=\frac{\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\underline{x})}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(\underline{y})}}$$

mit $\mathrm{Var}(\underline{x})=\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{x})$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\bar{x}^2$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 6796-31^2$$

$$=171{,}66\ldots\approx 171{,}7$$

$$\mathrm{Var}(\underline{y})=\mathrm{cov}(\underline{y},\underline{y})$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)-\bar{y}^2=\frac{1}{6}\cdot 100150-115^2$$

$$=3.466{,}66\ldots\approx 3.466{,}7$$

Dann erhalten wir: $\boxed{r(\underline{x},\underline{y}) = \frac{770}{\sqrt{171,6}\cdot\sqrt{3466,6}} \approx \frac{770}{\sqrt{171,7}\cdot\sqrt{3466,7}} \approx 0,998}$

Also offensichtlich eine „starke" empirische Korrelation zwischen dem Merkmal Zeit (x) und d. Pflanzenhöhe (y).

c) Ausgleichsgerade von y nach x:

Geradengleichung: $\boxed{\hat{y} = \alpha + \beta x}$ mit $\boxed{\beta = \frac{cov(\underline{x},\underline{y})}{Var(\underline{x})}}$ ← Steigung der Geraden,

$\alpha + \beta\bar{x} \overset{!}{=} \bar{y}$ ⇒ $\boxed{\alpha = \bar{y} - \beta\bar{x}}$ ← y-Achsenabschnitt

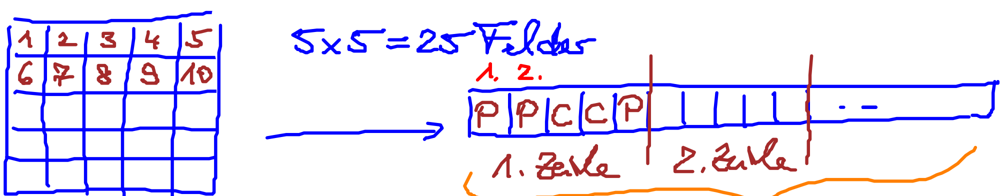
Schwerpunkt $S = (\bar{x}, \bar{y})$ liegt auf der Geraden!!

$$\boxed{\beta = \frac{cov(\underline{x},\underline{y})}{Var(\underline{x})} \approx \frac{770}{171,6} \approx 4,49}, \quad \boxed{\alpha = \bar{y} - \beta\bar{x} \approx 115 - 4,49\cdot 31 = = -24,19}$$

Also: $\boxed{\hat{y} = -24,19 + 4,49x}$ Geradengleichung

⇒ $\boxed{x = 39 \text{ ergibt } \hat{y} = -24,19 + 4,48\cdot 39 \approx 150,9}$

3



Modell: Felder hintereinander

ω: Ergebnis einer Befüllung!!

Befüllung jedes Feldes alternativ mit Pflaumenmus bzw. Cointreaufüllung

a) Ergebnisraum gemäß

Urnenmodell: Urne mit $\overset{n=2}{\vee}$ Kugeln: P C

Ziehen mit Zurücklegen bei Beachtung der Reihenfolge

Anzahl der Ziehungen: $s = 25$

$\Longrightarrow$ Ergebnisraum ist $\boxed{\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{25}) \mid \omega_i \in \{0,1\} \}}$

Symbolisiere:

1: „Pflaumenmus"

0: „Cointreaufüllung"

ω_2: Befüllung des 2. Feldes

$\Longrightarrow \Omega = \{0,1\}^{25} = \underbrace{\{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{25\text{-mal}}$

!!! Elegant

$\Longrightarrow \boxed{|\Omega| = 2^{25} \approx 33.554.432}$

b) Ereignis A: „19 Felder sind mit P, 6 Felder mit C gefüllt"

Modell: 25 Kugeln in einer Urne, Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (wie Lotto)

Also: $n = 25$, $s = 19$ (im Fall P-Felder ziehen) bzw.

$s = 6$ (im Fall C-Felder ziehen)

Binomialkoeffizient:

Zwillinge

$|A| = \binom{n}{s} = \binom{25}{19} = \binom{25}{6} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$

$s = 19$

$= 177.100$

Wahrscheinlichkeit:

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{177.100}{2^{25}} \approx 0{,}0053 \mathrel{\hat{=}} 5{,}3‰ = 0{,}53\,\%$

c) Ereignis B: „Die ersten 4 Felder sind P-bestückt, ansonsten beliebig"

„Pflaumenmus"

Beschreibe die für B „günstigen" Ergebnisse $\omega \in \Omega$

$B = \{ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{25}) \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 1 \}$

$\Longrightarrow |B| = 2^{21}$

Anzahl der freien Felder

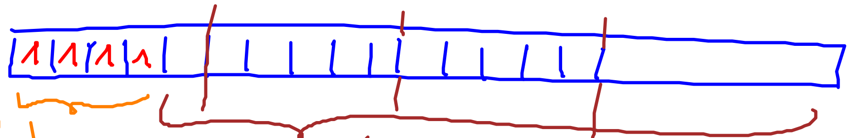
$\Longrightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2^{21}}{2^{25}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

Laplace

2^{25-21}

Außerdem: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{|A| + |B| - |A \cap B|}{|\Omega|}$

Ereignis $A \cap B$: „19 Felder Pflaumenmus und dabei die ersten 4 Felder P-bestückt“



festgelegt!

15 P-Füllungen auf $21 = 25 - 4$ Felder verteilt.

$$\Longrightarrow \boxed{|A \cap B| = \binom{21}{15} = \binom{21}{6} = 54.264}$$

$$\Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{54.264}{2^{25}}$$ bzw.

$$\boxed{P(A \cup B)} = \frac{\binom{25}{6} + 2^{21} - \binom{21}{6}}{2^{25}} = \frac{177.100 + 2.097.152 - 54.264}{2^{25}}$$

$$= \frac{2.219.988}{2^{25}} \approx \boxed{0{,}0662 \mathrel{\widehat{=}} 6{,}62\%}$$

ENDE der Vorlesung!

Den Rest der Probeklausur gibt's dann via Homepage!