Vorlesung vom 06.12.2012:

Zu H32): Beschreibung von C, D, „in geeigneter Weise" meint z. B.:

Beispiel: Zweifacher Würfelwurf mit X: Ergebnis im 1. Wurf, Y: Ergebnis im 2. Wurf $\Rightarrow \Omega = \{1,2,\dots,6\}^2 = \{1,\dots,6\} \times \{1,\dots,6\}$ (kartesisches Produkt)

Ereignis $E \subseteq \Omega$: $X+Y$ ist gerade (Augensumme)

$$\Rightarrow E = \{\underbrace{(\overset{X}{1},\overset{Y}{1})}_{=\omega_1}; \underbrace{(1,3)}_{=\omega_2}; (1,5); (2,2); (2,4); (2,6); \dots; (6,6)\}$$

Ergebnisse $\omega_i \in E \subseteq \Omega$

$$= \underbrace{\{(u_1,u_2) \mid u_1,u_2 \in \{1,3,5\}\}}_{E_1\text{: besteht aus „ungeraden" Augenpaaren}} \cup \underbrace{\{(g_1,g_2) \mid g_1,g_2 \in \{2,4,6\}\}}_{E_2\text{: besteht aus den „geraden" Augenpaaren}}$$

$|E_1| = 3 \cdot 3 = 9$

$$= \underbrace{(\{1,3,5\} \times \{1,3,5\})}_{=E_1} \cup \underbrace{(\{2,4,6\} \times \{2,4,6\})}_{=E_2} = E_1 \cup E_2$$

$|E_2| = 3 \cdot 3 = 9$

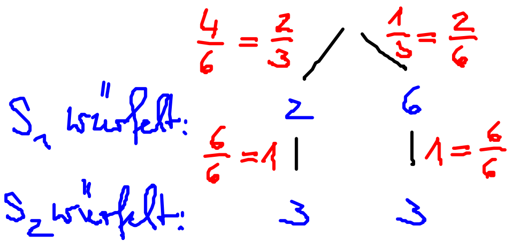
Dann gilt wegen $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (disjunkt):

$$\underline{P(E)} = P(E_1) + P(E_2) - \underbrace{P(E_1 \cap E_2)}_{=P(\emptyset)=0} = \frac{|E_1|}{|\Omega|} + \frac{|E_2|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = \underline{\frac{1}{2}}$$

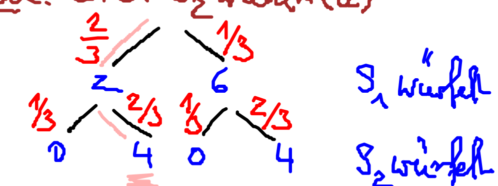
Zu H36(b): Es dürfen die 3 Urnen verschiedene Anzahlen von Kugeln nach der Neuverteilung enthalten! (s. überarbeitetes Aufgabenblatt im Netz)

Zu Ü35): Wir behandeln noch einmal beispielhaft den Fall, dass Spieler S_1 Würfel (c) wählt. Welchen Würfel sollte S_2 wählen?

Antwort: Würfel (b) macht das Rennen. Siehe Baumdiagramm:



Alternativwahl: z.B. S_2 wählt (a)



$S=\{(2,4)\} \Rightarrow P(S)=P(\{(2,4)\})\,!$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}<\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

S: S_2 siegt $\Rightarrow S=\{(2,3)\}=\{(x,y)\in\Omega \mid y>x\}$

Dann: $P(S)=P(\{(2,3)\})=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$

Zu Ü31): Wir hatten gestern schon herausbekommen: $\Omega=\{1,\dots,6\}^2$

$=\{(x,y) \mid x,y\in\{1,\dots,6\}\}$

Ereignis $F=\{(x,y)\in\Omega \mid x<3 \text{ oder } y>2\}$

$=F_1\cup F_2$ mit „$\cup$"

$F_1=\{(x,y)\in\Omega \mid x<3\}$ ← getrennt betrachtet!

$F_2=\{(x,y)\in\Omega \mid y>2\}$

$F_1=\{(1,1);(1,2);\dots;(1,6);$
$(2,1);(2,2);\dots;(2,6)\}$ $\quad\|\; x<3 \Leftrightarrow x=1,2$

$F_2=\{(1,3);(2,3);\dots;(6,3);(1,4);\dots;(6,4);$
$(1,5);\dots;(6,5);(1,6);\dots;(6,6)\}$ $\quad\|\; y>2 \Leftrightarrow y=3,4,5,6$

Es gilt:

Wichtige Formel! $\quad\|\; P(F)=P(F_1\cup F_2)=P(F_1)+P(F_2)-P(F_1\cap F_2) \overset{?}{=}$

$=??$

Frage: Was ist $F_1\cap F_2$?

$F_1\cap F_2=\{(x,y)\in\Omega \mid x<3 \text{ und } y>2\}=\{(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);$
$(2,3);(2,4);(2,5);(2,6)\}$

„und" $\quad x=1,2 \quad y=3,4,5,6$

$=\underbrace{\{1,2\}\times\{3,4,5,6\}}_{\text{kartesisches Produkt}} \;\|$

Analog könnten wir schreiben: $F_1=\{1,2\}\times\{1,\dots,6\}$, $F_2=\{1,\dots,6\}\times\{3,4,5,6\}$

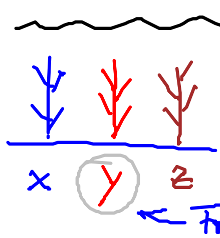
Es folgt:

$$P(F)=P(F_1)+P(F_2)-P(F_1\cap F_2)=\frac{|F_1|}{|\Omega|}+\frac{|F_2|}{|\Omega|}-\boxed{\frac{|F_1\cap F_2|}{|\Omega|}}$$

$$=\frac{2\cdot 6}{36}+\frac{6\cdot 4}{36}-\frac{2\cdot 4}{36}=\frac{12+24-8}{36}=\frac{28}{36}=\frac{7}{9}$$

Ü33) Mit Baumdiagramm:

$= \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$



← Frage der Erkrankung

Baumdiagramm für die „Fälle", wie y erkranken kann:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

1 0 ? | ? 1 ? | 0 0 1

$\frac{1}{5}$ | | $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$

1 1 ? | | 0 1 1 | 1 0 1

$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$

1 1 1

„Befall von links"

„Befall von rechts"

kein Befall von links

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{40}$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50}$

Wahrscheinlichkeit für „Direktbefall", d.h. Direkt-Erkrankung: $p = 1/2 = 0{,}5$

Wahrscheinlichkeit für „Indirektbefall" durch Nachbarinfizierung: $q = 1/5 = 0{,}2$.

„1": Pflanze ist erkrankt; „0": Pflanze ist gesund

Gesamtwahrscheinlichkeit für E: „y erkrankt":

$$\boxed{P(E)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{50}$$

$$= \frac{500+50+25+20}{1000} = \frac{595}{1000} = \underline{0{,}595}$$

Es bleiben dennoch Fragen offen!!

ENDE der heutigen Vorlesung!