Übung vom 30.01.13:

Bernoulli-Experiment:

Ist ein Experiment mit 2 möglichen Ausgängen, symbolisiert z.B. durch

0 : „Misserfolg" (= Gegenereignis)

1 : „Erfolg"

Man kann für das Experiment eine Zufallsgröße mit den Werten „0", „1" definieren. Dann fragt man z.B. nach den grundlegenden Wahrscheinlichkeiten

$$\boxed{P(X=1) = p > 0\,,\quad P(X=0) = q = 1-p > 0}$$

2 Beispiele:

Werfe einen Laplace-Würfel:

Ereignis $E = \{6\}$ sei „Erfolg", $E^c = \Omega \setminus E = \{1,2,\dots,6\} \setminus \{6\} = \{1,2,\dots,5\}$

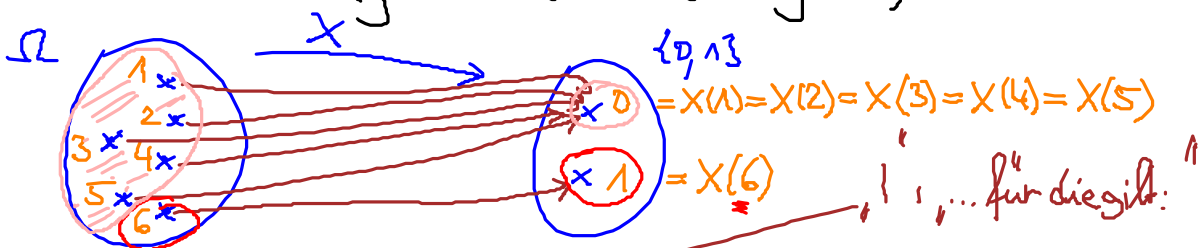
Erfolg Misserfolg

Zufallsvariable $\boxed{\begin{aligned} X: \Omega &\to \{0,1\} \\ \omega &\mapsto X(\omega)\end{aligned}}$ mit $X(6) = 1$, $X(1) = X(2) = \dots = X(5) = 0$

Das „Bild" von 6 „unter X" ist gleich 1

Dann:

X ist Abbildung von Ω in die Menge $\{0,1\}$



Es gilt: $\{X=1\} = \underbrace{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega)=1\}}_{\subseteq \Omega} = \{6\} = E$

Ereignis: „Erfolg"

, $\{X=0\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\} = \{1,2,\dots 5\} = E^c$

Dann gilt: $\boxed{p = P(X=1) = P(E) = \frac{1}{6}}$

$\boxed{q = P(X=0) = P(E^c) = 1 - P(E) = \frac{5}{6}}$

2. Beispiel: Ziehe aus einer Gruppe von $n = 1000$ Personen, in denen sich $m = 613$ Singles befinden, eine Person „zufällig" heraus.

„Erfolg" wäre: E: „Person ist Single". Zufallsgröße:

$$\boxed{X : \Omega \to \{0,1\}, \quad \omega \mapsto X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \omega \text{ „Single"} \\ 0, & \text{— " — } \omega \text{ „liiert"} \end{cases}}$$

„Erfolg"

$$p = P(X=1) = \frac{613}{1000} = 0{,}613 \ ; \quad q = P(X=0) = 1 - p = \frac{387}{1000} = 0{,}387$$

Jetzt n-stufiges Bernoulli-Experiment entspricht der n-fachen Wiederholung eines Experiments mit zwei möglichen Ausgängen – „Erfolg" vs. „Misserfolg" –, wobei die in den einzelnen Stufen von einander „unabhängig" sind.

Das entspricht dem Urnenmodell: „Ziehen mit Zurücklegen".

Jetzt können wir das n-stufige Experiment „modellieren" durch den Ereignisraum $\boxed{\Omega = \{0,1\}^n = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0,1\} \text{ für } i = 1, \dots, n\}}$

Z.B.: $n = 10$, $\omega = 1100101100$ $\quad \omega_8 = 1$

$\omega_3 = 0$ „Misserfolg"

Dann betrachtet man gern die Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X(\omega)$ als Anzahl der Erfolge in dem Gesamtergebnis $\omega \in \Omega$

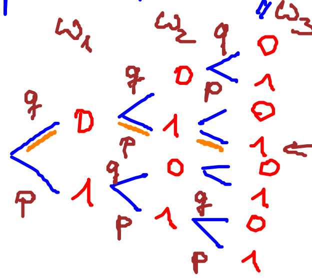
Z.B.: $\omega = 1100101100 \Rightarrow \boxed{X(\omega) = 5} = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$

$= X_1(\omega)+X_2(\omega)+\ldots+X_n(\omega)$

$X_k(\omega)=\omega_k \in \{0,1\}$ ist Ergebnis im k-ten Experiment der ‚Kette' (= Erfolg/Misserfolg) im k-ten Experiment.

Baumdiagramm:

n=3



$\omega = 011 \Rightarrow P(011) = p^2\cdot q^1 = p^2 q$

$X(\omega)=X(011)=2$

Ereignis $\{X=2\}=\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=2\}=\{011,110,101\}$

$\Omega=\{0,1\}^n$ hier steckt die voraus festgelegte Anzahl n an Experimenten drin!!

Urnenmodell: Ziehe aus einer Urne mit 3 Kugeln (= 3 Positionen) genau 2 Kugeln (= Positionen für „1" in ω) mit einem Griff

Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{3}{2}$

Binomialkoeffizient!

Jedes $\omega\in\{X=2\}$ hat dieselbe Wahrscheinlichkeit $\underset{1}{p^2}\cdot\underset{0}{q}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{P(X=2)=\underbrace{\binom{3}{2}}_{|\{X=2\}|}\cdot p^2 q}$

Damit folgt allgemein für ein Bernoulliexperiment mit n Stufen und Einzelwahrscheinlichkeiten p für „1" und $q=1-p$ für „0":

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}}$$

Binomial-verteilung

k-mal Erfolg bei n-maligem Experiment!

z.B.: In 100 Würfen eines Laplace-Würfels genau 3 Sechsen zu werfen ergibt die Wahrscheinlichkeit

$$P(X=3)=\binom{100}{3}\underbrace{\left(\tfrac{1}{6}\right)^3}_{p^3}\cdot\underbrace{\left(\tfrac{5}{6}\right)^{97}}_{q^{100-3}}=\underbrace{\frac{\cancel{100}^{50}\cdot\cancel{99}^{33}\cdot 98}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}}_{=161.700}\cdot\frac{5^{97}}{6^{100}}\approx 1{,}6\cdot 10^{-5}$$

$\approx 0{,}000016$

Für $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

Anzahl der Sechsen ist höchstens $= 3$

$$= \binom{100}{0} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{100} + \binom{100}{1}\left(\tfrac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{99} + \binom{100}{2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{98} + \binom{100}{3}\left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{97} = \ldots$$

Zu H56), Frage ist, wieviele Augenfarben in Teil (b) soll man für das zufällige Raten ansetzen? Mein Gedanke war: (das macht man oft so in der Statistik)

„zufälliges Raten" bedeutet 50% - 50% - Chance für Treffer (= Erfolg) bzw. Nichttreffer (= Misserfolg)

$\Longrightarrow \boxed{p = q = \tfrac{1}{2} = 0{,}5}$!!

Betrachte $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b, c\}$

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, a, b, c\} = \{b, 1, 2, c, a, 3\}$

$A \cap B = \{\} = \emptyset \neq \{\emptyset\} = \{\{\}\}$

$|\emptyset| = 0 \qquad |\{\emptyset\}| = 1$

$A \cap (A \cup B) = \{1, 2, 3\} = A$

$(A \cap A) \cup B = \{1, 2, 3, a, b, c\} = A \cup B$

2) $A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (3,c)\}$

$B \times A = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), \ldots\}$

$\{1\} \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c)\}$

3) Teilmengen $\{1, 2\} \subseteq A$

$\{1\} \times B \subseteq A \times B$

4) Potenzmenge: $\mathcal{P}(A)$ $\qquad A = \{1, 2, 3\}$

$2^{|A|} = |\mathcal{P}(A)|$

$$P(A) = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \underbrace{\{1,2,3\}}_{=A}, \emptyset \}$$

$$2^{|A|} = 2^3 = 8 = |P(A)| = \# P(A) = \text{Anz. von } P(A)$$

- $P(A)$ ist eine Menge von Mengen, d.h. die Elemente von $P(A)$ sind wieder Mengen. (Mengensystem).
- A ist eine Menge, deren Elemente keine Mengen sind.
- ein Element von $P(A)$ ist z.B.: $\{1\}$

eine Teilmenge von $P(A)$ ist z.B.: $\{ \{1\}, \{1,2\}, \emptyset \}$, $\{ \{1\} \}$

aber $\{1,2\} \notin P(A)$ sondern $\{1,2\} \subseteq A$

$\{1,2\} \in P(A) \xrightarrow[\text{aber}]{} \{ \{1,2\} \} \subseteq P(A)$

$1, 2, 3 \in A$

5) $S \subseteq P(A)$ heißt σ-Algebra, wenn

i) $\underset{\overset{\parallel}{\{1,2,3\}}}{A}, \emptyset \in S$

ii) $K \in S \Rightarrow \underset{\overset{\parallel}{K^c}}{A \setminus K} \in S$ — z.B. wenn $\{1\} \in S$ $\Rightarrow A \setminus \{1\} = \{2,3\} \in S$

iii) $L, K \in S \Rightarrow (L \cup K) \in S$

Bsp. $S = \{ \emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \underbrace{\{1,2,3\}}_{=A} \} \subseteq P(A)$

i) $\emptyset \in S$ ✓, $A \in S$ ✓

ii) $\emptyset^c = A \in S$ ✓; $\{3\}^c = \{1,2\} \in S$;
$\{1,2\}^c = \{3\}$; $A^c = \emptyset$

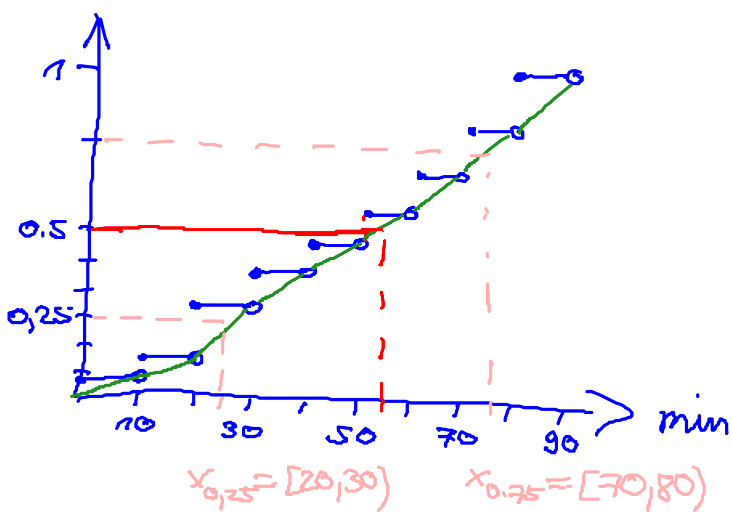
iii) z.B. $\emptyset \cup \{3\} = \{3\} \in S$ ✓
$\emptyset \cup \{1,2\} = \{1,2\} \in S$ ✓
$\{3\} \cup \{1,2\} = A \in S$ ✓
$\{3\} \cup \{1,2\}^c = \{3\} \cup \{3\} = \{3\}$
$\{3\} \cup \underbrace{\{1\}}_{\notin S}$ hier nicht zu überprüfen

$\{2\} \notin S$
$\{ \{2\} \} \notin S$
$\subseteq$ Teilmenge
$\in$ Element

Beispiel:

Spielmin	[0–10)	[10–20)	[20–30)	[30–40)	[40–50)	[50–60)	[60–70)	[70–80)	[80–90]	Σ
Anz. der Tore	8	7	20	11	13	15	15	18	26	133
rel. Häuf.	$\frac{8}{133}=0{,}06$	0,053	0,150	0,083	0,098	0,113	0,113	0,135	0,195	1
kum. Häuf.	0,06	0,113	0,263	0,346	0,444	0,557	0,67	0,805	1	

Verteilungsfunktion:



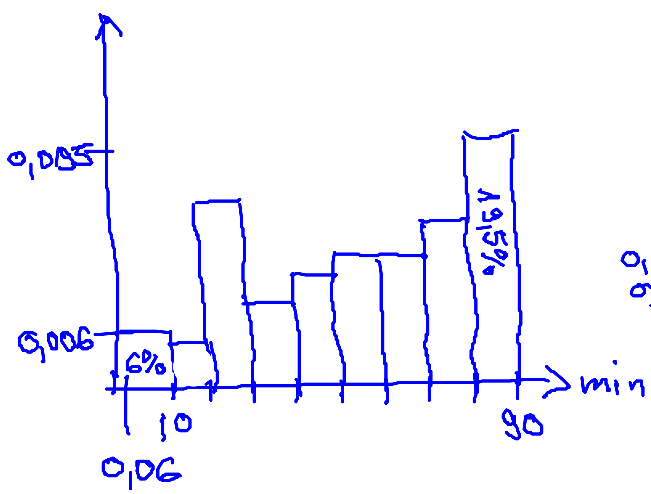
Median im [50,60)

x_{67}

arith. Mittel: $\frac{8\cdot 10+7\cdot 20+\ldots+26\cdot 90}{133}$

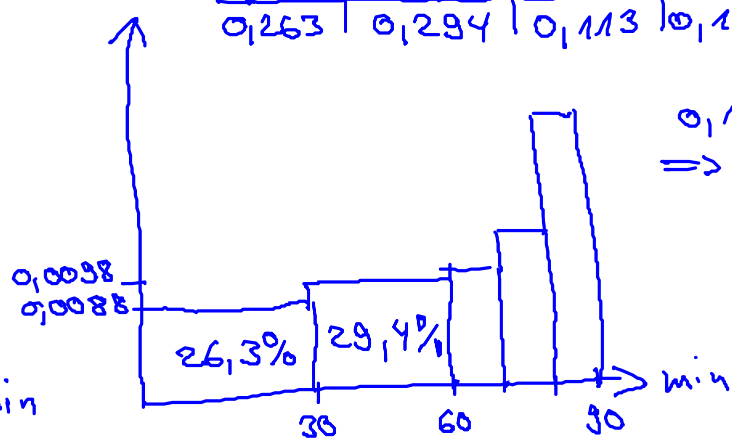
$=57{,}44$

Histogramm



andere Gruppierung

[0,30)	[30,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90]
0,263	0,294	0,113	0,135	0,195



$0{,}113 = x\cdot 10$

$\Rightarrow x = 0{,}0113$

$0{,}263 = x\cdot 30$

$\Rightarrow x = \frac{0{,}260}{30}$

$= 0{,}0088$ Höhe des Blockes

ENDE der Zusatzübung!