Große Übung vom 19.12.2012:

Zu Ü34)

a) $B \cdot A \cdot N \cdot A \cdot N \cdot E$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{180}$$

$E \quad N \quad N \quad B \quad A \quad A$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot 1 = \frac{1}{180} = \frac{\overset{2\,\text{"A"}}{2}\cdot\overset{2\,\text{"N"}}{2}}{6!}$$

b) $B \cdot X \quad X \quad X \quad X \cdot E$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{\cancel{4}}{5}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot 1 = \frac{1}{30}$$

c) $\underline{6}\cdot\underline{5}\cdot\underline{4}\cdot\underline{3}\cdot\underline{2}\cdot\underline{1} = 6! = 720$

$E\,B\,\underbrace{N}_{NN}\,\underbrace{A}_{AA} \quad \underline{4}\cdot\underline{3}\cdot\underline{2}\cdot\underline{1} = 4! = 24$

$$\leadsto \frac{4!\cdot 2\cdot 2}{6!} = \frac{4}{6\cdot 5} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

$EBNA \leadsto EBNNAA$

$EBN_2N_1A_2A_1 \longrightarrow \frac{1}{180}$

$EBN_1N_2A_1A_2 \longrightarrow \frac{1}{180}$

$EBN_2N_1A_1A_2 \longrightarrow \frac{1}{180}$

$EBN_1N_2A_2A_1 \longrightarrow \frac{1}{180}$

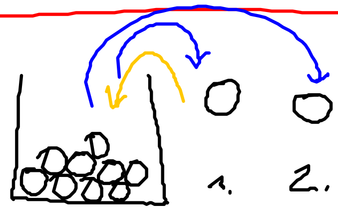
Zu den verschiedenen Urnenmodellen:

a) Ziehung mit/ohne Wiederholung kombiniert mit

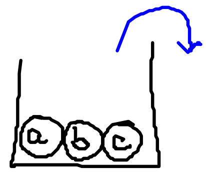
b) Ziehung mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Wiederholung heißt hier: Zurücklegen

1. Fall: $\boxed{\text{a) mit, b) mit}}$



Bsp:



Wieviele verschiedene Worte kann ich bei Wiederholung ziehen?

Mögliche Ergebnisse:

$\omega_1 =$ „abc", $\omega_2 =$ „bca", $\omega_3 =$ „aaa"

$$\Rightarrow \boxed{|\Omega| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = n^s}$$

1\. Ziehung: Anzahl Kugeln $= n$ 2. Ziehung: Anzahl an Kugeln $= n$

$$\boxed{\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_i \in \{a,b,c\}\}}$$

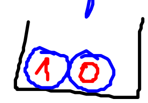
Mit n: Anzahl Kugeln

s: Anzahl Ziehungen

$$\Rightarrow \boxed{|\Omega| = n^s}$$

Beispielaufgabe: Im Raum sind $n = 7$ Lampen, die unabhängig voneinander an- bzw. ausgestellt werden können. Wieviele Beleuchtungsmöglichkeiten hat man für den Raum?

Urnenmodell: Für jede einzelne Lampe entscheidet man zufällig an/aus



Urne

1: „an", 0: „aus" } $n = 2$ Kugeln

Das für jede einzelne Lampe ergibt $s = 7$ Ziehungen!

$\Rightarrow$ Ziehen mit Zurücklegen

$\Rightarrow$ Es gibt $n^s = 2^7 = 128$ verschiedene Möglichkeiten

$$\Omega = \{\omega = (\underset{\{0,1\}}{\omega_1}, \dots, \omega_7) \mid \omega_i \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^7$$

2. Fall: a) ohne, b) mit

Modell: $n=5$ Kugeln, $s=3$ Ziehungen

ohne Zurücklegen heißt hier z.B. Wörter der Länge $s=3$ ziehen, in denen kein Buchstabe mehrfach vorkommt.

$$\Omega=\{\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\mid \omega_i\neq\omega_j \text{ für } i\neq j,\ \omega_i\in\{a,b,c,d,e\}\}$$

$$\Rightarrow |\Omega| = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-s+1) = 5\cdot4\cdot3$$

$(n+1)-1$ $\quad =(n+1)-2$

5 Möglichkeiten 1. Ziehung $\quad$ 4 Möglichkeiten 2. Ziehung $\quad$ 3 Mö

$$n-s+1 = 5-3+1 = 3$$

Allgemein: $\quad n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-s+1)\cdot\underbrace{\frac{(n-s)(n-s-1)\cdot\ldots\cdot1}{(n-s)(n-s-1)\cdot\ldots\cdot1}}_{=1} = (n)_s = \dfrac{n!}{(n-s)!}$

---

3. Fall: a) ohne, b) ohne

$\Rightarrow$ keine Berücksichtigung der Reihenfolge bei s Ziehungen, aber keine Wiederholung im Ergebnis!!

D.h. mit einem Griff s Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln herausgegriffen!! $\Rightarrow$ Binomialkoeffizient $\binom{n}{s}$

Der Fall entsteht aus dem 2. Fall, wobei Reihenfolge nicht beachtet wird.

Beispiel: Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus einer Menge von 5 Buchstaben 3 verschiedene auszuwählen.

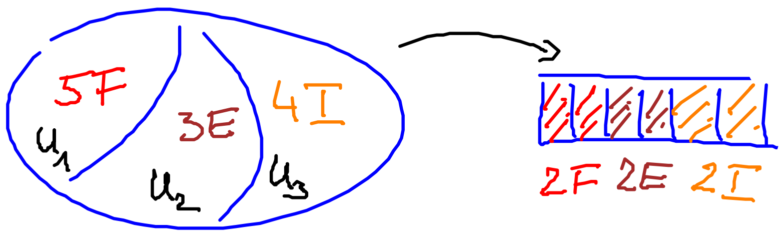
Antwort: $\binom{5}{3} = \binom{n}{s} = \dfrac{5\cdot4\cdot3}{3!} = \dfrac{(n)_s}{s!} = \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-s+1)}{s!}$

Anzahl der Permutationen von $s=3$ Objekten

Identifiziere z.B. die Wörter $\quad 6=3\cdot2=3!$

ace $\quad$ eac
aec $\quad$ eca
cae
cea

Bsp: Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einer Gruppe von 5 Franzosen, 3 Engländern und 4 Italienern eine paritätisch besetzte Kommission von 6 Mitgliedern auszuwählen?



Modell: 3 Einzelurnen, jeweils nach Nationalität getrennt; dann jeweils 2 Kugeln in einem Griff herausgezogen!!

Antwort:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & U_2 & U_3 \\ \binom{5}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} \\ F & E & I \end{array}$$

Kombinationsmöglichkeiten:

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 6 = \underline{\underline{180}}$$

Morgen in der Vorlesung mehr dazu!