

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

### 8. Aufgabenblatt zur „Statistik für Biologen“

(Abgabe der H-Aufgaben: Mittwoch, 23.01.2013, in der Großen Übung)

#### Ü 43. Aufgabe:

In einem Laden ist eine Alarmanlage eingebaut. Bei Einbruch (Ereignis  $E$ ) gibt sie mit 99%er Sicherheit Alarm (Ereignis  $A$ ). Wenn in einer bestimmten Nacht kein Einbruch stattfindet, gibt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5% falschen Alarm, weil z.B. eine Maus den Kontaktdraht berührt hat. Die allgemeine Wahrscheinlichkeit für einen Einbruch in einer Nacht betrage 0,1%. Soeben hat die Anlage Alarm gegeben.

Ermitteln Sie unter Rückgriff auf die Formel von Bayes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass gerade ein Einbruch im Gange ist. Malen Sie dazu auch ein Baumdiagramm und tragen Sie die entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten dort ein.

#### H 44. Aufgabe:

In einer Fabrik zur Glühbirnenherstellung leisten drei Maschinen  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  die Gesamtproduktion im Verhältnis 25 : 35 : 40. Der Ausschuß an defekten Glühbirnen betrage für die drei Maschinen jeweils  $p_1 = 5\%$ ,  $p_2 = 4\%$  und  $p_3 = 2\%$ . Vor dem Verkauf werden die von den drei Maschinen hergestellten Glühbirnen gründlich vermischt.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(D)$ , daß eine zufällig verkaufte Glühbirne defekt ist.
- Bei der Qualitätssicherung hat der die Produktion überwachende Ingenieur zufällig eine defekte Glühbirne aus der Gesamtproduktion entdeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $P(M_1 | D)$ , daß das defekte Teil aus der Produktion von Maschine  $M_1$  stammt?

Malen Sie ein entsprechendes Baumdiagramm unter Eintrag entsprechender bedingter Wahrscheinlichkeiten.

|  |     |
|--|-----|
|  | 8,0 |
|--|-----|

#### Ü 45. Aufgabe:

Im *New York Times Magazine* vom 11.03.1979 wurde folgende Tabelle über die absolute und relative Häufigkeit von Fällen veröffentlicht, in denen im Bundesstaat Florida wegen Mordes Angeklagte zum Tode bzw. nicht zum Tode verurteilt wurden. Dabei steht „S“ („Schwarz“) bzw. „W“ („Weiß“) für die Hautfarbe des Angeklagten.

|                            | S     | W     | Gesamt |
|----------------------------|-------|-------|--------|
| <b>Todesurteil</b>         | 59    | 72    | 131    |
| <b>Kein Todesurteil</b>    | 2.148 | 2.185 | 4.633  |
| <b>Summe</b>               | 2.507 | 2.257 | 4.764  |
| <b>Relative Häufigkeit</b> | 2,4%  | 3,2%  | 2,7%   |

Der Gouverneur des Staates Florida behauptete daraufhin, dass Schwarze hinsichtlich der Verkündung von Todesurteilen gegenüber Weißen offensichtlich nicht benachteiligt würden.

- Gehen Sie dieser Behauptung durch Berechnung entsprechender bedingter Wahrscheinlichkeiten nach. Betrachten Sie dazu die Ereignisse  $D$ : „Der Angeklagte wird zum Tod

verurteilt (death penalty)“ und  $B_A$  : „Der Angeklagte (accused) ist von schwarzer Hautfarbe (black)“ sowie die entsprechenden Gegenereignisse  $D^C$  und  $B_A^C$ .

- b) Es wurde daraufhin folgende näher aufgeschlüsselte Tabelle veröffentlicht, in der die Daten auch nach der Hautfarbe des Opfers aufgeschlüsselt sind:

| Hautfarbe des Opfers       | S     |      | W     |       |
|----------------------------|-------|------|-------|-------|
| Hautfarbe des Angeklagten  | S     | W    | S     | W     |
| <b>Todesurteil</b>         | 11    | 0    | 48    | 72    |
| <b>Kein Todesurteil</b>    | 2.209 | 111  | 239   | 2.074 |
| <b>Summe</b>               | 2.220 | 111  | 287   | 2.146 |
| <b>Relative Häufigkeit</b> | 0,5%  | 0,0% | 16,7% | 3,4%  |

Weisen Sie nun unter Einbeziehung des Ereignisses  $B_V$  : „Das Opfer (victim) ist von schwarzer Hautfarbe (black)“ sowie des entsprechenden Gegenereignisses  $B_V^C$  durch Berechnung entsprechender bedingter Wahrscheinlichkeiten nach, dass schwarze Angeklagte in jedem Fall gegenüber weißen Angeklagten hinsichtlich der Verkündung von Todesurteilen benachteiligt sind.

Das beschriebene Phänomen nennt man auch *Simpsons Paradox*.

**H 46. Aufgabe:**

In Anchurien ist ein sehr zuverlässiger Test zur Diagnose der ansteckenden Viruserkrankung „Mathemalitis periculosa“ entwickelt worden. Im Falle einer *Erkrankung* mit diesem Virus (Ereignis  $K$ ) fällt der Test mit einer Sicherheit von 96% *positiv* aus (Ereignis  $T^+$ ). Bei *gesunden* Personen (Ereignis  $K^C$ ) zeigt der Test mit einer Sicherheit von 94% ein *negatives* Ergebnis (Ereignis  $T^-$ ). Die allgemeine Ansteckungsgefahr  $P(K)$  mit diesem Virus betrage in Anchurien  $P(K) = \frac{1}{145}$ .

- a) Der Premierminister von Anchurien hat sich nun dem Test unterzogen, und das Testergebnis ist positiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Premierminister auch wirklich mit dem Virus infiziert ist?
- b) Der Vizepremierminister hat sich ebenfalls dem Test unterzogen, wobei sein Testergebnis negativ ausfällt. Allerdings zeigt er einige Symptome der Viruserkrankung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Vizepremier trotz negativen Ergebnisses dennoch mit dem Virus infiziert ist?

(*Hinweis:* Man arbeite mit der Formel von Bayes für bedingte Wahrscheinlichkeiten.)

|  |     |
|--|-----|
|  | 6,0 |
|--|-----|

**Ü 47. Aufgabe:**

Eine Population sei nach zwei Merkmalen  $A$  und  $B$  in 4 Kategorien unterteilt (z.B. Geschlecht und Raucherverhalten). Die folgende *Vierfeldertafel* gebe in allgemeiner Form die absoluten Häufigkeiten der 4 Kategorien in dieser Population wieder.

|                      |          |                      |
|----------------------|----------|----------------------|
|                      | <b>B</b> | <b>B<sup>c</sup></b> |
| <b>A</b>             | A        | b                    |
| <b>A<sup>c</sup></b> | C        | d                    |

Zeigen Sie:

Die beiden Ereignisse  $A$  : „Eine zufällig ausgewählte Person trägt das Merkmal  $A$ “ und  $B$  : „Eine zufällig ausgewählte Person trägt das Merkmal  $B$ “ sind genau dann stochastisch unabhängig sind, wenn gilt:  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = 0$ .

Geben Sie ein Beispiel einer Belegung dieser Vierfeldertafel mit konkreten Zahlen an, für welche diese Bedingung erfüllt ist.

Tipp: Beachten Sie, dass die Population die Größe  $n = a + b + c + d$  hat.

**H 48. Aufgabe:**

Zu einem Symposium über „Neuere stochastische Modelle in der Biologie“ werden die Professoren  $A$ (lbert),  $B$ (runo) und  $C$ (aspar) eingeladen, um jeweils einen der drei Hauptvorträge zu übernehmen. Die Wahrscheinlichkeit, daß die eingeladenen Herren kommen, betrage entsprechend  $P(A) = 0,8$ ,  $P(B) = 0,6$  bzw.  $P(C) = 0,9$ .

Unter der Bedingung, daß die drei Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  für das jeweilige Erscheinen der drei Herren auf dem Symposium unabhängig voneinander sind, berechne man die Wahrscheinlichkeit für folgende drei Ereignisse:

$E$  : „Alle drei Professoren kommen“,

$F$  : „Keiner der drei Professoren kommt“ und

$G$  : „Mindestens zwei der Professoren erscheinen.“

Tipp: Beachten Sie, dass stochastische Unabhängigkeit erhalten bleibt, wenn einzelne Ereignisse durch ihre Gegenereignisse ersetzt werden.

|  |     |
|--|-----|
|  | 6,0 |
|--|-----|