Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

WS 2012/13
28.11.2012

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

5. Aufgabenblatt zur „Statistik für Biologen“

(*Abgabe der H-Aufgaben: Mittwoch, 05.12.2012,* in der Großen Übung)

25. Aufgabe:

Gegeben seien die Mengen $A = \{0,3,6,9\}$, $B = \{0,2,4,6,8\}$ und $C = \{0,1,4,5,7\}$ mit Grundmenge $\Omega = \{0,1,\ldots,9\}$. Beschreiben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Schreibweise:

Ü (a) $A \cap (B \cup C)$, (b) $(A \cap B) \times C^C$, (c) $(A \cup C^C) \times (B^C \cup C)^C$, (e) $\wp(A)$, (f) $\wp(A^C \cap B^C)$,

H (a) $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$, (b) $(A^C \setminus B) \cup (C^C \setminus B)$, (c) $(A \setminus B) \times (C \setminus B)$, (d) $\wp(C \setminus B)$.

	4,0

26. Aufgabe:

Überprüfen Sie folgende Mengenbeziehungen auf ihren Wahrheitswert hin und geben Sie jeweils eine Begründung für Ihre Entscheidung:

Ü (a) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$, (b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, (c) $\{\emptyset\} \in \wp(\emptyset)$,
H (d) $0 \in \{\emptyset\}$, (e) $\{\emptyset\} \subseteq \wp(\emptyset)$, (f) $\{\emptyset\} \cup \emptyset = \{\emptyset,\emptyset\}$.

	4,0

Ü *27. Aufgabe:*

Sei Ω der Grundraum der möglichen Ergebnisse eines Würfelwurfs sowie $A \subseteq \Omega$ das Ereignis „Wurf einer ungeraden Zahl“ und $B \subseteq \Omega$ das Elementarereignis „Wurf einer Sechs“. Konstruieren Sie die kleinstmögliche σ-Algebra S , welche die Ereignisse A und B enthält.

H *28. Aufgabe:*

Sei $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} = \{0,1\}^3$ der gegebene Grundraum sowie $S = \{\emptyset, \{000, 001, 010, 011\}, \{100, 101, 110\}, \{111\}, \{100, 101, 110, 111\}, \Omega\} \subseteq \wp(\Omega)$.

a) Untersuchen Sie, ob S eine σ-Algebra bildet oder nicht.

b) Falls S keine(!) σ-Algebra darstellt, vervollständigen Sie S durch möglichst wenige Teilmengen $A \subseteq \Omega$, damit S eine σ-Algebra wird.

	6,0

Ü *29. Aufgabe:*

Ein Beispiel aus der Käferwelt zur *geometrischen Wahrscheinlichkeit*:

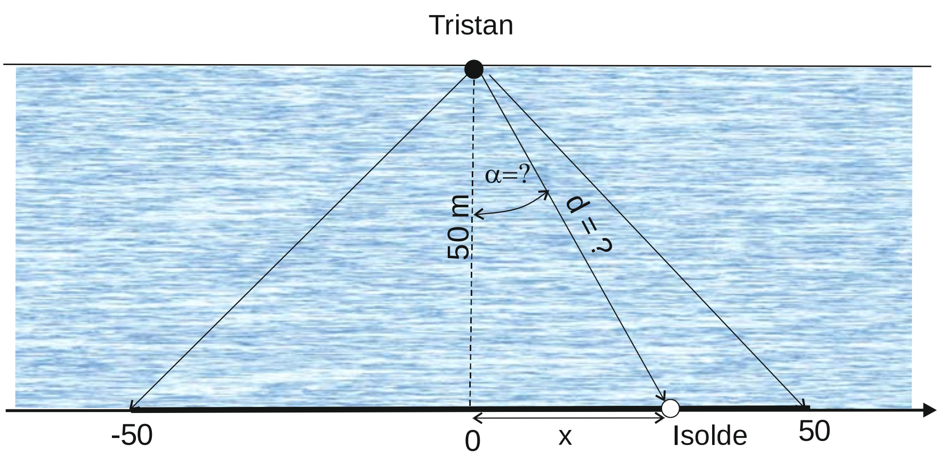
a) Leuchtkäfer Tristan wartet am Ufer eines 50 m breiten Flusses auf der Erscheinen seines Leuchtkäferweibchens Isolde auf einem Uferabschnitt der Länge 100 m (siehe nachfolgende Skizze). Sobald er Isolde leuchten sieht, fliegt er auf direktem Wege über den Fluss zu seiner Angebeten hin. Tristan hat nur ein Handicap: Nach 60 m Flugstrecke benötigt er eine Ruhepause. Falls er jedoch sich noch über dem Wasser befinden sollte, wird er bedauerlicherweise abstürzen und ertrinken.

Wählt man nun als Grundraum $\Omega = [-50\ ,\ 50]$ für den gesamten gegenüberliegenden Uferabschnitt, auf dem Isolde zu erwarten ist, so beschreibe man zunächst das Ereignis $A \subseteq \Omega$: „Tristan überlebt den Flug“ in der Form $A = [-a, a]$ mit $a > 0$ geeignet und berechne die Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$, dass Tristan heil bei Isolde ankommt, als geometrisches Intervalllängenverhältnis.

b) Leuchtkäfer Tristan wartet seit 20 min vergebens auf das Erscheinen von Isolde. Daher beschließt er, geradewegs in Richtung des anderen Ufers zu fliegen und wählt sich zufällig eine Winkelrichtung $\alpha \in \Omega = \left[-45^\circ, 45^\circ\right]$ aus dem neuen Grundraum Ω aus in Hoffnung, am entsprechend jenseitigen Uferpunkt auf Isolde zu treffen. Beschreiben sie nun wieder das Ereignis A: „Tristan überlebt den Überflug" in der Form $A = [-\alpha_0, \alpha_0]$ mit $0 < \alpha_0 < 45^\circ$ geeignet und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$ wieder als entsprechendes geometrisches Intervalllängenverhältnis.

<u>Tipp</u>: Zur Bestimmung von A dient der Satz des Pythagoras sowie im Fall (b) die trigonometrische Umkehrfunktion $arccos = cos^{-1}$.

Skizze zu Aufgabe 29:



H <u>*30. Aufgabe:*</u>

Florian und Sarah verabreden sich zu einem „blind date" an der Siegessäule. Dabei erscheint jeder von ihnen zufällig zu einem Zeitpunkt zwischen 16:00 Uhr und 17:00 Uhr an der Siegessäule und wartet maximal $\lambda = 10$ min auf den jeweils anderen. Kommt der andere in dieser Zeit nicht, ist das Treffen gescheitert.

a) Bezeichne $\Omega = \left\{(x_S, y_F) \middle| x_S, y_F \in \boldsymbol{R}, 0 \le x_S, y_F \le 60 \right\} = [0,60]^2$ den (geometrischen) Grundraum aller möglichen Konstellationen $(x_S, y_F) \in \Omega$, in denen Sarah zum Zeitpunkt 16:00 Uhr + x_S min und Florian zum Zeitpunkt 16:00 Uhr + y_F min an der Siegessäule eintreffen. Skizzieren Sie das Ereignis A: „Das Treffen kommt zustande" als entsprechende Teilmenge in dem Rechteck Ω. Beachten Sie dabei, dass gilt:

$$(x_S, y_F) \in A \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \left| x_S - y_F \right| \le \lambda .$$

b) Berechnen Sie die geometrische Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{F(A)}{F(\Omega)}$ für das Eintreffen des Ereignisses A als Flächeninhaltsverhältnis für die verschiedenen Wartezeiten (i) $\lambda = 10$ min und (ii) $\lambda = 5$ min.

c) Wie groß muss $\lambda > 0$ gewählt werden, damit $P(A) = \dfrac{F(A)}{F(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$ gilt?

Tipp: Zur Bestimmung von $P(A)$ ist es leichter, über das Gegenereignis A^C zu gehen.

	6,0