Technische Universität Berlin
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

StR.i.HD. Albrecht Gündel-vom Hofe

WiSe 2017/18
11.12.2017

9. Aufgabenblatt zur „Mathematik III für die Beruflichen Fachrichtungen“

(*Abgabe der Hausaufgaben: 08.01.2018* in der VL)

<u>*70. Aufgabe:*</u>

Gegeben seien die Mengen $A = \{a,b,c\}$, $B = \{0,1\}$ und $C = \{\alpha,\beta,\gamma\}$.

Ü (a) Bestimmen Sie alle möglichen Abbildungen $f_i : A \to B$ sowie $g_k : B \to A$ – wieviele gibt es denn jeweils? – und veranschaulichen Sie jeweils drei der Abbildungen f_i und g_k mittels ihrer Graphen. Welche der Abbildungen sind *surjektiv*, welche *injektiv* und welche der *verketteten* Abbildungen $h = f_i \circ g_k$ sind *bijektiv* ?

Ü (b) Bestimmen Sie alle möglichen Abbildungen $\tilde{g}_k : B \to C$ und $\tilde{f}_i : C \to B$ und veranschaulichen Sie jeweils drei der Abbildungen mittels ihrer Graphen. Welche der Abbildungen sind *surjektiv*, welche *injektiv* und welche der *verketteten* Abbildungen $\tilde{h} = \tilde{g}_k \circ \tilde{f}_i$ sind *bijektiv* ?

H (c) Bestimmen Sie (direkt) alle *bijektiven* Abbildungen $h_\mu : A \to C$ und veranschaulichen Sie alle diese Abbildungen mittels ihrer Graphen. Wieviele verschiedene bijektive Abbildungen $h_\mu : A \to C$ gibt es? Welche dieser Abbildungen lassen sich als *Komposition* der Form $h_\mu = \tilde{g}_k \circ f_i$ mit einer Abbildung $f_i : A \to B$ aus Teil (a) und einer Abbildung $\tilde{g}_k : B \to C$ aus Teil (b) darstellen?

	8,0

Ü <u>*71. Aufgabe:*</u>

Sei H die Menge aller Menschen (homo sapiens) sowie F die Menge aller Frauen und $M = H \setminus F$ die Menge aller Männer. Betrachte dann die folgenden Abbildungen:

(i) $f : H \to H$, $f(x)$ ist (biologische) Mutter von $x \in H$,

(ii) $g : H \to H$, $g(x)$ ist (biologischer) Vater von $x \in H$,

(iii) $h : H \to F \times M$, $h(x)$ ist (biologisches) Elternpaar von $x \in H$.

Insbesondere gilt dann für jeden Menschen $x \in H$: $h(x) = (a,b) = (f(x), g(x))$.

a) Beschreiben Sie in Worten die zusammengesetzten Abbildungen (*Kompositionen*)
(i) $f^2 = f \circ f$, (ii) $f \circ g$, (iii) $g \circ f$ und (iv) $g^2 = g \circ g$. Gilt insbesondere $f \circ g = g \circ f$?

b) Beschreiben Sie jeweils in Worten, was es bedeutet, dass die Abbildungen f, g und h *injektiv*, *surjektiv* oder *bijektiv* sind. Entscheiden Sie dann jeweils, ob eine dieser genannten Eigenschaften im Allgemeinen auf f bzw. g bzw. h zutrifft.

c) Geben Sie zu beliebigem $y \in H$ und $(a,b) \in F \times M$ jeweils die *Urbildmengen* $f^{-1}(\{y\})$, $g^{-1}(\{y\})$ sowie $h^{-1}(\{(a,b)\})$ beschreibend an. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Urbildmengen?

Ü *<u>73. Aufgabe:</u>*

Auf $\boldsymbol{N}^2 = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ sei die Abbildung $f : \boldsymbol{N}^2 \to \boldsymbol{N}$ gegeben durch $f(x,y) = (x+2)\cdot(y-1)$ für $(x,y) \in \boldsymbol{N}^2$, wobei $\boldsymbol{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen (ohne die Null) ist.

a) Untersuchen Sie, ob f injektiv oder surjektiv (oder sogar beides) ist.

b) Bestimmen Sie die *Bildmenge* $f(A) \subseteq \boldsymbol{N}$ für $A = \{ (x,2);\, x \in \boldsymbol{N} \} \subseteq \boldsymbol{N}^2$ und die *Urbildmenge* $f^{-1}(B) \subseteq A \times A$ für $B = \boldsymbol{P} = \{ p \in \boldsymbol{N} ;\ p \text{ ist Primzahl} \} \subseteq \boldsymbol{N}$.

c) Geben Sie die speziellen Urbilder $f^{-1}(\{58\})$, $f^{-1}(\{59\})$ und $f^{-1}(\{60\})$ in aufzählender Mengenschreibweise an.

(*<u>Tipp</u>:* Primzahlen sind die Zahlen $p \in \boldsymbol{N}$ mit $p > 1$, für die gilt: Ist $p = a \cdot b$ mit $a,b \in \boldsymbol{N}$, so folgt: $a = 1$ oder $b = 1$. Dies nennt man auch die *Unzerlegbarkeitseigenschaft*.)

<u>75. Aufgabe:</u>

Bilden Sie für die folgenden gegebenen Funktionen f und g jeweils die Funktionen $f+g$, $g-f$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ sowie $f \circ g$ und $g \circ f$ und geben Sie dabei zusätzlich die jeweils maximalen Definitionsbereiche D_f, D_g, D_{f+g}, D_{g-f}, $D_{f \cdot g}$, $D_{f:g}$, $D_{g:f}$, $D_{f \circ g}$ und $D_{g \circ f}$ an.

Ü (a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$; **Ü** (b) $f(x) = \sqrt{5-x}$, $g(x) = \ln x$;

H (c) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

	14,0