Technische Universität Berlin WiSe 2017/18
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften 04.12.2017
Institut für Mathematik

StR.i.HD. Albrecht Gündel-vom Hofe

8. Aufgabenblatt zur
„Mathematik III für die Beruflichen Fachrichtungen"

(*Abgabe der Hausaufgaben: 11.12.2017* in der VL)

70. Aufgabe:

Gegeben seien die Mengen $A = \{a,b,c\}$, $B = \{0,1\}$ und $C = \{\alpha,\beta,\gamma\}$.

Ü (a) Bestimmen Sie alle möglichen Abbildungen $f_i : A \to B$ sowie $g_k : B \to A$ – wieviele gibt es denn jeweils? – und veranschaulichen Sie jeweils drei der Abbildungen f_i und g_k mittels ihrer Graphen. Welche der Abbildungen sind *surjektiv*, welche *injektiv* und welche der *verketteten* Abbildungen $h = f_i \circ g_k$ sind *bijektiv* ?

Ü (b) Bestimmen Sie alle möglichen Abbildungen $\tilde{g}_k : B \to C$ und $\tilde{f}_i : C \to B$ und veranschaulichen Sie jeweils drei der Abbildungen mittels ihrer Graphen. Welche der Abbildungen sind *surjektiv*, welche *injektiv* und welche der *verketteten* Abbildungen $\tilde{h} = \tilde{g}_k \circ \tilde{f}_i$ sind *bijektiv* ?

H (c) Bestimmen Sie (direkt) alle *bijektiven* Abbildungen $h_\mu : A \to C$ und veranschaulichen Sie alle diese Abbildungen mittels ihrer Graphen. Wieviele verschiedene bijektive Abbildungen $h_\mu : A \to C$ gibt es? Welche dieser Abbildungen lassen sich als *Komposition* der Form $h_\mu = \tilde{g}_k \circ f_i$ mit einer Abbildung $f_i : A \to B$ aus Teil (a) und einer Abbildung $\tilde{g}_k : B \to C$ aus Teil (b) darstellen?

	8,0

Ü *71. Aufgabe:*

Sei H die Menge aller Menschen (homo sapiens) sowie F die Menge aller Frauen und $M = H \setminus F$ die Menge aller Männer. Betrachte dann die folgenden Abbildungen:

(i) $f : H \to H$, $f(x)$ ist (biologische) Mutter von $x \in H$,

(ii) $g : H \to H$, $g(x)$ ist (biologischer) Vater von $x \in H$,

(iii) $h : H \to F \times M$, $h(x)$ ist (biologisches) Elternpaar von $x \in H$.

Insbesondere gilt dann für jeden Menschen $x \in H$: $h(x) = (a,b) = (f(x), g(x))$.

a) Beschreiben Sie in Worten die zusammengesetzten Abbildungen (*Kompositionen*)
(i) $f^2 = f \circ f$, (ii) $f \circ g$, (iii) $g \circ f$ und (iv) $g^2 = g \circ g$. Gilt insbesondere $f \circ g = g \circ f$?

b) Beschreiben Sie jeweils in Worten, was es bedeutet, dass die Abbildungen f, g und h *injektiv*, *surjektiv* oder *bijektiv* sind. Entscheiden Sie dann jeweils, ob eine dieser genannten Eigenschaften im Allgemeinen auf f bzw. g bzw. h zutrifft.

c) Geben Sie zu beliebigem $y \in H$ und $(a,b) \in F \times M$ jeweils die *Urbildmengen* $f^{-1}(\{y\})$, $g^{-1}(\{y\})$ sowie $h^{-1}(\{(a,b)\})$ beschreibend an. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Urbildmengen?

Ü *72. Aufgabe:*

Sei $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$ sowie $A \times A$ die Menge der möglichen „Augenpaare“ beim Wurf mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln. Weiter sei die Abbildung $f : A \times A \to \mathbf{N}$ gegeben durch $f(a,b) = (a+b)^2$ für $(a,b) \in A \times A$ (also $f(a,b)$ als Quadrat der Augenzahlensumme).

a) Geben Sie explizit an: $f(3,1)$ und $f(5,5)$.
b) Untersuchen Sie, ob f injektiv ist, und bestimmen Sie das Bild $f(A \times A)$.
c) Bestimmen Sie die *Bildmenge* $f(C) \subseteq \mathbf{N}$ für $C = \{ (x,2); x \in A\} \subseteq A \times A$ und die *Urbildmenge* $f^{-1}(D) \subseteq A \times A$ für $D = \{ y \in \mathbf{N} ; y \textit{ ist durch } 5 \textit{ teilbar} \} \subseteq \mathbf{N}$.
d) Geben Sie die speziellen Urbilder $f^{-1}(\{n\})$ für $n = 1, 4, 16, 49, 81, 121$ nacheinander in aufzählender Mengenschreibweise an.

Ü *73. Aufgabe:*

Auf $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sei die Abbildung $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ gegeben durch $f(x,y) = (x+2)\cdot(y-1)$ für $(x,y) \in \mathbf{N}^2$, wobei $\mathbf{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen (ohne die Null) ist.

a) Untersuchen Sie, ob f injektiv oder surjektiv (oder sogar beides) ist.
b) Bestimmen Sie die *Bildmenge* $f(A) \subseteq \mathbf{N}$ für $A = \{ (x,2); x \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathbf{N}^2$ und die *Urbildmenge* $f^{-1}(B) \subseteq A \times A$ für $B = \mathbf{P} = \{ p \in \mathbf{N} ; p \textit{ ist Primzahl} \} \subseteq \mathbf{N}$.
c) Geben Sie die speziellen Urbilder $f^{-1}(\{58\})$, $f^{-1}(\{59\})$ und $f^{-1}(\{60\})$ in aufzählender Mengenschreibweise an.

(*Tipp:* Primzahlen sind die Zahlen $p \in \mathbf{N}$ mit $p > 1$, für die gilt: Ist $p = a \cdot b$ mit $a,b \in \mathbf{N}$, so folgt: $a = 1$ oder $b = 1$. Dies nennt man auch die *Unzerlegbarkeitseigenschaft*.)

H *74. Aufgabe:*

Sei $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$ sowie $A \times A$ die Menge der möglichen „Augenpaare“ beim Wurf mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln. Weiter sei die Abbildung $f : A \times A \to \mathbf{N}$ gegeben durch

$$f(a,b) = a^b \quad \text{für} \quad (a,b) \in A \times A \ ,$$

also $f(a,b)$ als der aus den Ergebnissen beider Würfel gebildeten Potenz.

a) Geben Sie explizit an: $f(3,1)$, $f(1,3)$ und $f(5,5)$.
b) Untersuchen Sie, ob f injektiv ist, und bestimmen Sie das Bild $f(A \times A)$ von f .
c) Bestimmen Sie die *Bildmenge* $f(C) \subseteq \mathbf{N}$ für $C = \{ (x,2); x \in A\} \subseteq A \times A$ sowie die *Urbildmenge* $f^{-1}(D) \subseteq A \times A$ für $D = \{ y \in \mathbf{N} ; y \textit{ ist durch } 4 \textit{ teilbar} \} \subseteq \mathbf{N}$.
d) Geben Sie speziell die Urbilder $f^{-1}(\{n\})$ für $n = 1, 4, 16, 27, 64, 81, 100$ nacheinander in aufzählender Mengenschreibweise an.

	17,0