

StR.i.HD. Albrecht Gündel-vom Hofe

**10. Aufgabenblatt zur
„Mathematik I für die Beruflichen Fachrichtungen“**
(Abgabe der Hausaufgaben: 17.01. / 19.01.2017 in den Tutorien)

Ü 23. Aufgabe:

Eine Biologengruppe untersucht das Wachstumverhalten einer Zellkultur. Ausgehend von einer unbekanntem Anzahl N_0 an Ausgangszellen, werden zu den Zeitpunkten $t_1 = 24h$ und $t_2 = 48h$ folgende Zellanzahlen gemessen: $N(24) = 801$ sowie $N(48) = 2.384$.

- Bestimmen Sie die Wachstumskonstante $a > 0$ sowie die Anfangszahl N_0 an Zellen und stellen Sie das Wachstumsgesetz für die Zellkultur auf.
- Erreicht die Zellkultur die Größe $N_k = 1.000.000$, wird die Untersuchung kritisch. Bestimmen Sie den Zeitpunkt $t > 0$ auf die Minute genau, wann die kritische Zellenzahl überschritten wird.

Ü 24. Aufgabe:

Bei jährlicher Verzinsung (Zinseszinsrechnung) vermehrt sich ein Startkapital K_0 gemäß der Formel: $K(t) = K_0 \cdot (1 + p)^t$, wobei p der gegebene Zinssatz ist.

- Bestimmen Sie das Kapital $K(2,5)$ nach $2\frac{1}{2}$ Jahren, wenn bei einem Zinssatz von $p = 5,5\% = 0,055$ ein Startkapital von $K_0 = 1.000 \text{ EUR}$ angelegt wird.
- In welchem Zeitraum Δt verdoppelt sich jeweils das Kapital? D.h.: Für welches $\tau = \Delta t$ gilt also unabhängig von t die Gleichung $K(t + \tau) = 2 \cdot K(t)$?
- Wie groß muss der Zinssatz p gewählt werden, damit nach drei Jahren ein Kapital von $K(3) = 1.200 \text{ EUR}$ ausgezahlt werden kann?

Ü 25. Aufgabe:

Die Temperatur-Volumen-Beziehung bei adiabatischer Zustandsänderung verläuft nach dem

Gesetz $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$ mit dem Adiabatenexponenten $\kappa > 1$.

- Unter Vorgabe von $\kappa = 1,4$ bestimme man, ausgehend von einer Anfangstemperatur von $T_1 = 293 \text{ K}$, die Endtemperatur T_2 , wenn das Ausgangsvolumen V_1 pneumatisch auf $1/20$ komprimiert wird. Welcher Zusammenhang besteht also zwischen V_1 und V_2 ?
- Wie stark muss umgekehrt das Volumen V_1 verringert werden, damit in dem Feuerzeug eine Temperatur von $T_2 = 410 \text{ K}$ entsteht?
- Ein Gas mit der Ausgangstemperatur $T_1 = 320 \text{ K}$ und unbekanntem Adiabatenexponenten $\kappa > 1$ kühlt sich bei Verdoppelung seines Ausgangsvolumens V_1 auf $T_2 = 233 \text{ K}$ ab. Bestimmen Sie aus der Adiabaten Gleichung den Exponenten κ (Rundung auf 3 Nachkommastellen).

„Mathematik I für die Beruflichen Fachrichtungen“

H 26. Aufgabe:

Eine Tasse Kaffee mit Anfangstemperatur $T_0 = 70^\circ\text{C}$ werde bei 0°C Außentemperatur auf das Fensterbrett des Arbeitszimmers gestellt. Nach $t = 15$ Minuten beträgt die Kaffeetemperatur noch $T(15) = 14^\circ\text{C}$.

- Stellen Sie unter der Annahme, dass die Abkühlung des Kaffees sich *exponentiell* verhält, die mathematische Formel $T(t)$ für die Kaffeetemperatur zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ her. Ermitteln Sie dazu die Abkühlungskonstante $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Zu welchem Zeitpunkt t_0 auf die Sekunde genau muss man die Kaffeetasse wieder in den Raum holen, wenn die Kaffeetemperatur exakt 40°C betragen soll?

	8,0
--	-----

Ü 27. Aufgabe:

Der Luftdruck $p(x)$ in der Höhe x [m] über dem Erdboden beträgt nach der Barometrischen

Höhenformel $p(x) = p_0 \cdot e^{-\frac{a \cdot x}{p_0}}$ ($x \geq 0$). Dabei sei p_0 der Luftdruck auf Erdbodenhöhe, gemessen in Hektopascal [hPa], und $a > 0$ eine spezifische Gaskonstante.

- Durch Messungen seien die Werte $p(100) = 1001,3 \text{ hPa}$ sowie $p(1000) = 899,1 \text{ hPa}$ ermittelt worden. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass für die Gaskonstante der Wert $a = 0,1201 \text{ hPa/m}$ gegeben ist, den Luftdruck p_0 auf Erdbodenhöhe.
- Mithilfe des in (a) ermittelten p_0 bestimme man die Höhe x_0 auf cm gerundet, in welcher der Luftdruckwert theoretisch $p(x_0) = 266,4 \text{ hPa}$ beträgt.

Ü 28. Aufgabe:

Bei der Behandlung einer Krankheit wird einem Patienten durch einen Tropf kontinuierlich ein Medikament in flüssiger Form zugeführt. Zu Beginn der Verabreichung enthält der Körper das Medikament noch gar nicht. Nach Beginn der Zufuhr über den Tropf erhöht sich die Menge des Medikaments im Körper, während gleichzeitig der Körper mit der Verarbeitung und dem Abbau des Medikaments beginnt. Irgendwann stellt sich ein Gleichgewicht zwischen Zufuhr und Abbau ein: der sogenannte *Sättigungswert* m_s . Die zum Zeitpunkt $t \geq 0$ im Körper des Patienten befindliche Medikamentenmenge ist gegeben durch die Funktionsgleichung $m(t) = m_s \cdot (1 - e^{-\lambda t})$ für $t \geq 0$ mit dem Parameter $\lambda > 0$.

- Messungen haben ergeben, dass sich zum Zeitpunkt $t = 30$ min eine Menge von $m = 21,1$ ME (Mengeneinheiten) sowie zum Zeitpunkt $t = 60$ min eine Menge von $m = 31,1$ ME des Medikaments im Körper des Patienten befinden. Bestimmen Sie aufgrund dieser Angaben die beiden Parameter m_s und $\lambda > 0$.
- Welche Medikamentenmenge $m(t)$ befindet sich gerade zum Zeitpunkt $t = 45$ min im Körper des Patienten?
- Zu welchem Zeitpunkt auf die Sekunde genau werden im Körper 95 % des Sättigungswerts m_s erreicht sein?

„Mathematik I für die Beruflichen Fachrichtungen“

H 29. Aufgabe:

Die den Ablauf einer chemischen Reaktion beschreibende *Geschwindigkeitskonstante* k steht in Abhängigkeit von der absoluten Temperatur T , bei welcher die Reaktion abläuft. Der Zusammenhang zwischen beiden Größen wird beschrieben durch die *Arrheniussche*

Gleichung $k(T) = A \cdot e^{-\frac{\lambda}{T}}$, wobei $A > 0$ eine für die betrachtete Reaktion charakteristische Konstante und $\lambda > 0$ den die spezifische Aktivierungsenergie der Reaktion enthaltenden Parameter bezeichnet.

- a) In der Reaktionsgleichung (*) $C_2H_5Cl(g) \rightarrow C_2H_4(g) + HCl(g)$ sei $\lambda > 0$ gegeben durch $\lambda = 2,95 \cdot 10^4 \text{ K}$ sowie A durch $A = 4,3 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$. Bestimmen Sie $k(T)$ für die Temperaturwerte $T_1 = 300 \text{ K}$ und $T_2 = 700 \text{ K}$.
- b) Welche Temperatur T_0 auf eine Nachkommastelle genau liefert $k(T_0) = 1,9 \cdot 10^{-25} \text{ s}^{-1}$ für die Funktion $k(T)$ aus Teil (a) ?
- c) Für die Geschwindigkeitskonstante der Gleichung (*) $2 \text{ NOCl}(g) \rightarrow 2 \text{ NO}(g) + \text{Cl}_2(g)$ ergibt sich aufgrund von Messungen für die Temperaturen $T_1 = 300 \text{ K}$ und $T_2 = 400 \text{ K}$ die Werte $k(300) = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ sowie $k(400) = 7,0 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}$. Ermitteln Sie daraus den Parameter λ der betrachteten Reaktion sowie die zugehörige Konstante A .

	10,0
--	------