Geometrische Interpretation der Lösungen z_k:

Die n verschiedenen Lösungen $z_k \in \mathbf{C}$ ($k = 0,\ldots, n-1$) von $z^n = a$ liegen alle auf dem Kreis mit Radius $\rho = \sqrt[n]{|a|}$ um $z = 0$ und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks (Polygons) mit Anfangswinkel $\alpha_n = Arg\, z_0 = \dfrac{\varphi}{n}$ und Differenzwinkel $\varphi_n = \dfrac{2\pi}{n}$.

Bemerkungen:

- Für die n-ten Einheitswurzeln ζ_k ($k = 0,\ldots, n-1$) gilt: $\boxed{\zeta_k = \zeta_1^{\,k} \ \ (k = 0,\ldots, n-1)}$ mit $\boxed{\zeta_1 = e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$.
- Für die n komplexen Wurzeln z_k ($k = 0,\ldots, n-1$) von $a = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) \in \mathbf{C}$ gilt:
$$\boxed{z_k = z_0\cdot\zeta_1^{\,k} \ \ (k = 0,\ldots, n-1) \ \text{ mit } \ z_0 = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\cdot\frac{\varphi}{n}}} \ .$$
- Die n Lösungen z_k ($k = 0,\ldots, n-1$) der Gleichung $z^n = a$ mit $a \in \mathbf{C}$ erfüllen die Gleichung: $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} z_k = z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1} = 0}$.
- Mithilfe der n-ten Wurzeln lassen sich nun auch – unter Rückgriff auf die Lösungen einer quadratischen reellen Gleichung – sämtliche Lösungen von Gleichungen der folgenden Form bestimmen: $(*)$ $\boxed{p(z) = a\cdot z^{2n} + b\cdot z^n + c = 0}$, $n \in \mathbf{N}$, für $a,b,c \in \mathbf{R}$ beliebig mit $a \neq 0$. Dazu geht man, wie folgt, vor:
  1. Substituiere $\boxed{w = z^n}$ in der Ausgangsgleichung. Dann erhält man zunächst die zu lösende reelle quadratische Gleichung: $(**)$ $\boxed{q(w) = a\cdot w^2 + b\cdot w + c = 0}$.
  2. Setze die beiden (evtl. komplexen) Lösungen $w_{1,2}$ aus der quadratischen Gleichung jeweils in die Substitutionsgleichung $(***)$ $\boxed{z^n = w_k}$, ($k = 1,2$) ein und löse diese.

  Insgesamt erhält man so alle $2n$ Lösungen der Ausgangsgleichung. Beachte dabei, dass die beiden eventuell komplexen Lösungen der (reellen) quadratischen Gleichung $(**)$ sogar *konjugiert komplex* zueinander sind. Es gilt also: $w_2 = \overline{w_1}$. Dann sind auch automatisch die n Lösungen zu $z^n = w_1$ und die n Lösungen zu $z^n = w_2 = \overline{w_1}$ zueinander konjugiert komplex. Also muss man in diesem Fall nur eine der Gleichungen $(***)$ lösen, und die Rechenarbeit reduziert sich auf die Hälfte.

Abbildungen und reelle Funktionen allgemein

Wir stoßen jetzt zu einem der zentralen Begriffe der Analysis vor: dem der Abbildung bzw. Funktion.

<u>*Definition:*</u>

Seien A und B zwei Mengen[1]. Eine *Abbildung von* A *in* B (oder: *nach* B) ist eine Zuordnungsvorschrift, die *jedem* $x \in A$ *genau ein* $y \in B$ zuordnet.

- Man nennt A den *Definitions-* oder *Urbildbereich von* f (in Zeichen: $\boxed{D_f = A}$), B den *Ziel-* oder *Bildbereich von* f.
- Das durch f abgebildete Element $x \in A$ heißt auch *Argument* oder *Variable von* f, das dem Element $x \in A$ eindeutig zugeordnete Element $y \in B$ das *Bild von* x *unter* f oder *Funktionswert von* f *an der Stelle* x. Das Element x selbst nennt man auch (ein) *Urbild von* y unter f. Man schreibt: $\boxed{y = f(x)}$.
- Zur Beschreibung der Abbildung f von $D_f = A$ in B findet man die *symbolischen Schreibweisen* $\boxed{f: D_f \to B,\, x \mapsto f(x)}$ oder $\boxed{f: x \mapsto f(x) \text{ mit } x \in D_f}$ oder auch $\boxed{y = f(x) \text{ mit } x \in D_f}$. Manchmal benutzt man in Kurzform auch nur $\boxed{x \mapsto f(x)}$ o.ä.
- Ist $M \subseteq A$ eine Teilmenge von A, so heißt die Menge[2] $\boxed{f(M) := \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in M \right\} \subseteq B}$ das *Bild von* M *unter* f. Speziell heißt $f(A) \subseteq B$ auch das *Bild von* f. Oft findet man als Definition für den *Wertebereich* von f in diesem Zusammenhang: $\boxed{W_f = f(A)}$.
- Ist $N \subseteq B$ eine Teilmenge von B, so heißt die Menge $\boxed{f^{-1}(N) := \left\{ x \in A \,\middle|\, f(x) \in N \right\} \subseteq A}$ das *Urbild von* N *unter* f. Speziell gilt: $f^{-1}(B) = D_f = A$. Als *Urbild eines Elements* $y \in B$ unter f erhält man also speziell: $\boxed{f^{-1}(\{y\}) := \left\{ x \in A \,\middle|\, f(x) = y \right\}}$.
- Die Menge $\boxed{\Gamma_f := \left\{ (x,y) \,\middle|\, x \in A, y = f(x) \right\} = \left\{ (x, f(x)) \,\middle|\, x \in A \right\} \subseteq A \times B}$ heißt der *Graph von* f. Insbesondere gilt im Fall $A, B \subseteq \mathbf{R}$:

Eine Teilmenge $M \subseteq A \times B \subseteq \mathbf{R}^2$ ist Graph einer Abbildung bzw. Funktion $f: A \to B$ $\Leftrightarrow$ Durch *jeden* Punkt $a \in A$ trifft die Gerade $x = a$ die Punktmenge M in *genau einem* Punkt $S(a,b) \in M$. Es gilt dann: $b = f(a)$.

Es folgen einige grundlegende Eigenschaften von und Begriffe zu Abbildungen.

Grundlegende Abbildungseigenschaften:		
Bild / Urbild von Durchschnitt und Vereinigung:	$f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N)$ $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$ für $M,N \subseteq A$	$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ für $U,V \subseteq B$

[1] Zu den Symbolen „$\in$" sowie zum Begriff der Menge siehe speziell den Exkurs „Naive Mengenlehre".
[2] Zur beschreibenden Form von Mengen, zum Symbol „$\subseteq$" sowie zu den einzelnen Mengenoperatinonen – insbesondere zum Kartesischen Produkt $A \times B$ – siehe auch den Exkurs „Naive Mengenlehre".

Gleichheit von Abbildungen:	Für zwei Abbildungen $f: A \to B$ und $g: C \to D$ gilt $f = g$ genau dann, wenn $(i)\ \ D_f = A = C = D_g$, $(ii)\ \ W_f = B = D = W_g$, $(iii)\ \ \forall x \in A:\ f(x) = g(x)$.
Verkettung / Komposition von Abbildungen: ($g \circ f$: „g *nach* f“)	Seien $f: A \to B$, $g: C \to D$ Abbildungen mit $W_f = B \subseteq D_g = C$ Dann ist die *Verkettung* bzw. *Komposition* (Hintereinanderausführung) von f und g als Abbildung definiert durch: $g \circ f : A \to D \quad \text{mit} \quad \forall x \in A: (g \circ f)(x) := g(f(x))$.
Spezielle Abbildungen:	*konstante* Abbildung: $f: A \to B$ mit $\forall x \in A: f(x) = c\ \ (c \in B)$. *identische* Abbildung: $id_A : A \to A$ mit $\forall x \in A: id_A(x) = x$.
Injektivität von Abbildungen:	$f: A \to B$ heißt *injektiv* oder *eineindeutig* $:\Leftrightarrow$ $\forall x, x' \in A:\ x \neq x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x')$ bzw. dazu äquivalent $\forall x, x' \in A:\ f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'$.
Surjektivität von Abbildungen:	$f: A \to B$ heißt *surjektiv* oder *Abbildung <u>auf</u>* $B :\Leftrightarrow$ $f(A) = B$ bzw. $\forall y \in B: f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ [3].
Bijektivität:	$f: A \to B$ heißt *bijektiv* $:\Leftrightarrow$ f ist *injektiv* und *surjektiv* . D.h.: *Zu jedem* $b \in B$ *existiert genau ein* $a \in A$ mit $b = f(a)$.
Umkehrabbildung:	Sei $f: A \to B$ bijektiv. a) *<u>Definition</u>* der *Umkehrabbildung* f^{-1} von f : $f^{-1} : B \to A \quad \text{mit} \quad y = f^{-1}(x) :\Leftrightarrow x = f(y)$. b) *<u>Graph</u>* $\Gamma_{f^{-1}}$ von f^{-1} : $\Gamma_{f^{-1}} = \left\{ (x,y) \in B \times A \;\middle\vert\; (y,x) \in \Gamma_f \right\}$. c) *<u>Zusammenhang mit der identischen Abbildung</u>* *id :* Es gilt: $f^{-1} \circ f = id_A$ und $f \circ f^{-1} = id_B$

<u>Bemerkungen:</u>

- Man beachte, dass für zwei Abbildungen $f: A \to B$ und $g: B \to C$ hinsichtlich der Verkettung selbst im Fall $A = B = C$ im allgemeinen gilt: $g \circ f \neq f \circ g$.
- Im Fall der *konstanten* Abbildung schreibt man symbolisch zuweilen auch $f(x) \equiv c$ oder kürzer: $f \equiv c$.

[3] Zum Symbol $\emptyset$ der sogenannten „leeren Menge“ siehe den Exkurs „Naive Mengenlehre“.

- Für die *identische* Abbildung gelten in Bezug auf jede beliebige Abbildung $f: A \to B$ die charakteristischen Gleichungen (i) $f \circ id_A = f$ und (ii) $id_B \circ f = f$.
- Man widerlegt die *Injektivität* bzw. die *Surjektivität* einer gegebenen Abbildung $f: A \to B$ durch Angabe eines sogenannten *Gegenbeispiels*, d.h.:

  (i) Man finde konkret $x,x' \in A$ mit $x \neq x'$ und $f(x) = f(x')$ im Fall der *Nicht-Injektivität*.

  (ii) Man finde $y \in B$ mit $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ im Fall der *Nicht-Surjektivität*.
- Jede nicht injektive Abbildung $f: A \to B$ kann durch geeignete *Einschränkung* des *Definitionsbereichs* $D_f = A$ *injektiv* und jede nicht surjektive Abbildung durch *Einschränkung* des *Wertebereichs* auf das Bild $W_f = f(A)$ von f *surjektiv* gemacht werden.
- Die Gleichungen $f^{-1} \circ f = id_A$ bzw. $f \circ f^{-1} = id_B$ dienen oft konkret der Probe, ob durch eine aus der Auflösung der Gleichung $x = f(y)$ nach y gewonnene Abbildungsvorschrift $y = f^{-1}(x)$ wirklich die Umkehrabbildung f^{-1} zu f beschrieben wird.
- Eine Abbildung $f: A \to B$ mit $A,B \subseteq \boldsymbol{R}$ wird auch (reelle) *Funktion* genannt. In diesem Fall nennt man die im Fall der Bijektivität existierende Umkehrabbildung f^{-1} auch die *Umkehrfunktion* zu f . Aufgrund der Definition des Graphen $\Gamma_{f^{-1}}$ zu f^{-1} kann man zudem ablesen: Der Graph $\Gamma_{f^{-1}}$ geht aus dem Graphen Γ_f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ hervor.
- Im Fall zweier *reeller* Funktionen $f: A \to \boldsymbol{R}$ und $g: B \to \boldsymbol{R}$ mit $D = A \cap B \neq \emptyset$ lassen sich auf D auch die folgenden Funktionen einführen:

  (i) $f + g : D \to \boldsymbol{R}$, $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $x \in D$,

  (ii) $f - g : D \to \boldsymbol{R}$, $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$, $x \in D$,

  (iii) $f \cdot g : D \to \boldsymbol{R}$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$, $x \in D$ sowie

  (iv) $\frac{f}{g} : D' \to \boldsymbol{R}$, $(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in D'$ mit $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} = D \setminus g^{-1}(\{0\})$.
- (Reelle) Funktionen können auch *abschnittsweise* definiert werden. Dann ist der Definitionsbereich D_f in disjunkte Teilmengen zerlegt, auf denen jeweils eine eigene Funktionsvorschrift gegeben ist, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \,, \quad \boxed{f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x} & \text{für} \quad x > 0 \\ \frac{1}{2+x} & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ -x & \text{für} \quad x < -1 \end{cases}} \,.$$

- Manchmal besitzt eine Funktion eine spezielle Stelle - *Singularität* genannt -, an der sie einen bestimmten Funktionswert erhält, wie im folgenden Beispiel: