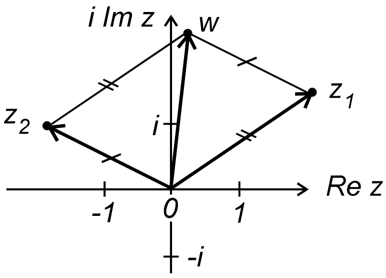
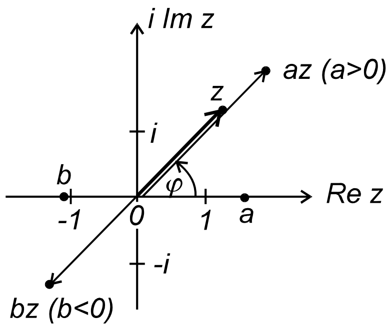
Auf diese Weise erhält man für die Addition komplexer Zahlen sowie für die Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer rellen Zahl folgende geometrische Veranschaulichung:

- Der *Summe* $\boxed{w = z_1 + z_2}$ zweier komplexer Zahlen entspricht der Vektor, der durch Aneinanderhängen der beiden „Vektoren“ z_1 und z_2 gemäß *Parallelogrammregel* (d.h. *Vektoraddition*) entsteht (siehe dazu Skizze (a) auf der folgenden Seite).
- Dem *Produkt* $\boxed{w = a \cdot z}$ einer komplexen Zahl $z \in \mathbf{C}$ mit einer reellen Zahl $a \in \mathbf{R}$ entspricht der Vektor mit Länge $|w| = |a| \cdot |z|$ und der Richtung $Arg\,(w) = Arg\,z = \varphi$ im Fall $a > 0$ bzw. der Richtung $Arg\,(w) = Arg\,(-z) \equiv \varphi + 180°\ (2\pi)$ im Fall $a < 0$. Für $a = 0$ oder $z = 0$ erhält man insbesondere den *Nullvektor* $w = 0$ (siehe dazu nachfolgende Skizze (b)).

Skizze:



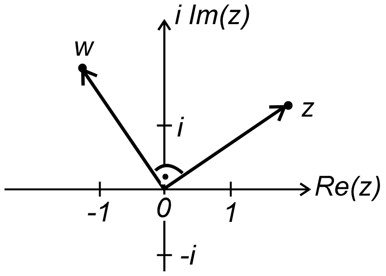
(a) $w=z_1+z_2$



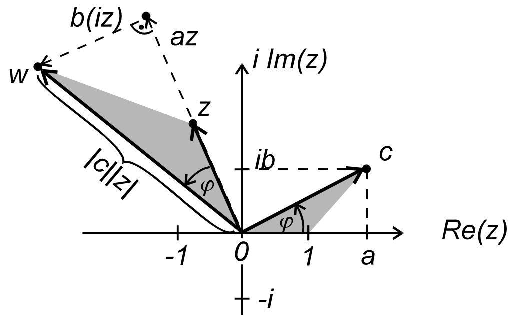
(b) w=az , a reell

- Dem *Produkt* $\boxed{w = i \cdot z = -y + i \cdot x}$ von i und $z \in \mathbf{C}$ entspricht der Vektor mit Länge $|w| = |i| \cdot |z| = |z|$ und Richtung $Arg\,(w) \equiv Arg\,(z) + 90°\ (2\pi)$. Damit entsteht w aus dem „Vektor“ z durch *Drehung um* $90°$ entgegen dem Uhrzeigersinn (d.h. im math. *positiven* Drehsinn). (Siehe dazu Skizze (c).)
- Dem *Produkt* $\boxed{w = c \cdot z}$ der beiden komplexen Zahlen $c = a + i\,b \in \mathbf{C}$ und $z \in \mathbf{C}$ entspricht der Vektor, der durch Vektoraddition der beiden „Vektoren“ $a \cdot z$ und $b \cdot (i \cdot z)$ entsteht (siehe dazu Skizze (d)). Damit folgt für Länge und Richtung des Vektors w:
  (*i*) $|w| = |c| \cdot |z|\ |w|$ und (*ii*) $Arg\,(w) \equiv Arg\,(z) + \varphi\ \ (2\pi)$ mit $Arg\,(c) = \varphi$.

Skizze:



(c) w=iz



(d) w= c·z

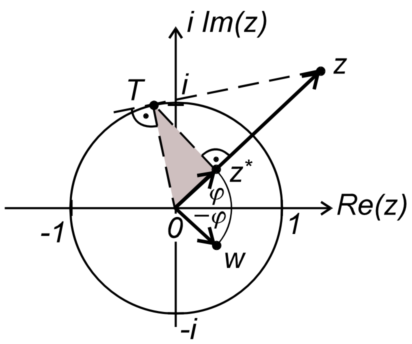
Also ist die Multiplikation von $z \in \boldsymbol{C}$ mit einer anderen (festen) komplexen Zahl $c \in \boldsymbol{C}$ interpretierbar als *Drehstreckung* mit *Streckfaktor* $|c|$ und *Drehwinkel* $\varphi = Arg\,(c)$.

- Dem *Kehrwert* $\boxed{w = z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$ einer beliebigen komplexen Zahl $z \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$

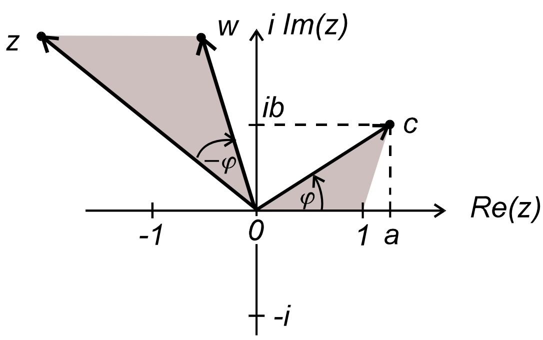
  entspricht der Vektor, welcher aus dem „Vektor“ z durch Hintereinanderausführung der *Spiegelung am Einheitskreis* – also dem Kreis um $z_0 = 0$ mit Radius $r = 1$ – mit Bild $z^* = \frac{z}{|z|^2}$ und der anschließenden *Spiegelung an der reellen Achse* mit Bild $w = \bar{z}^*$ entsteht. Insbesondere gilt dafür (siehe dazu Skizze (e)):

  $|w| = \frac{1}{|z|}$, $Arg\,(w) = -Arg\,(z^*) = -Arg\,(z) = -\varphi$.

<u>*Skizze*</u>*:*



(e) *w = 1/z* *(z ≠ 0)*



(f) *w= z/c* *(c ≠ 0)*

- Die *Division* $\boxed{w = \frac{z}{c} = z \cdot \frac{1}{c}}$ der komplexen Zahlen $z \in \boldsymbol{C}$ durch die komplexe Zahl $c \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ ist eigentlich die Multiplikation von z mit $c^* = \frac{1}{c}$. Somit wird die Division einer komplexen Zahl $z \in \boldsymbol{C}$ durch eine andere komplexe Zahl $c \in \boldsymbol{C}$ mit $c \neq 0$ als *Drehstreckung* interpretierbar. Dabei ist $c^* = \frac{1}{|c|}$ der *Streckfaktor,* $\varphi^* = Arg\,(c^*) = -Arg\,(c) = -\varphi$ der *Drehwinkel* (siehe dazu Skizze (f)).

Die Polardarstellung komplexer Zahlen

Für komplexe Zahlen $z = x + i\,y \in \boldsymbol{C}$ und $w = u + i\,v \in \boldsymbol{C}$ gelten bezüglich der *Polarkoordinaten* im Rückgriff auf trigonometrische Beziehungen unter Berücksichtigung der Erweiterung von *cos* und *sin* als Kreisfunktionen auf allgemein orientierte Winkel die folgenden *Gesetze*:

Polardarstellung / Eulersche Form einer komplexen Zahl	$z = r \cdot e^{i\varphi} := r \cdot (cos\,(\varphi) + i \cdot sin\,(\varphi))$ mit $r = \lvert z \rvert$ und $\varphi = arg\,(z)$

Umrechnung Kartesisch $\to$ Polardarst.	$z = x + i\,y \longrightarrow z = r \cdot e^{i\varphi} := r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ mit $r = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{r}) & \text{, falls } y \ge 0 \\ -\arccos(\frac{x}{r}) & \text{, falls } y < 0 \end{cases}$
Umrechnung Polardarst. $\to$ Kartesisch	$z = r \cdot e^{i\varphi} := r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \longrightarrow z = x + i\,y$ mit $x = r \cdot \cos(\varphi)$ und $y = r \cdot \sin(\varphi)$
Formeln von De Moivre und Folgerungen	$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \cdot (\cos(\psi) + i\sin(\psi)) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) \quad (n \in \mathbf{N}_0)$ bzw. $e^{i\cdot\varphi} \cdot e^{i\cdot\psi} = e^{i\cdot(\varphi+\psi)}$ $(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi) \quad (n \in \mathbf{N}_0)$ bzw. $(e^{i\cdot\varphi})^n = e^{i\cdot n\varphi} \quad (n \in \mathbf{N}_0)$ $\frac{1}{\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \overline{\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)}$ bzw. $\frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = \overline{e^{i\varphi}}$.
Multiplikation / Division komplexer Zahlen in Polardarstellung:	Für $z = r\cdot e^{i\cdot\varphi} = \lvert z \rvert \cdot (\cos\,\varphi + i\cdot\sin\,\varphi) \in \mathbf{C}$ und $w = \rho\cdot e^{i\cdot\psi} = \lvert w \rvert \cdot (\cos\,\psi + i\cdot\sin\,\psi) \in \mathbf{C}$ gilt speziell: (i) $z \cdot w = \lvert z \rvert \cdot \lvert w \rvert \cdot (\cos(\varphi+\psi) + i \cdot \sin(\varphi+\psi))$ bzw. $z \cdot w = r \cdot \rho \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$ (ii) $z^n = \lvert z \rvert^n \cdot (\cos(n\cdot\varphi) + i \cdot \sin(n\cdot\varphi)) \quad (n \in \mathbf{N}_0)$ bzw. $z^n = r^n \cdot e^{i\cdot n\varphi}$ (iii) $\frac{z}{w} = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert w \rvert} \cdot (\cos(\varphi-\psi) + \sin(\varphi-\psi))$ bzw. $\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho} \cdot e^{i\cdot(\varphi-\psi)}$

<u>*Bemerkungen*</u>*:*

- Die Polardarstellung bzw. Eulersche Form der komplexen Zahlen macht noch einmal deutlich: Die Multiplikation von $z \in \mathbf{C}$ beliebig mit einer (festen) komplexen Zahl $c = r\cdot e^{i\cdot\varphi} = \lvert c \rvert \cdot (\cos\,\psi + i\cdot\sin\,\psi)$, $c \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ sich geometrisch deuten lässt als *Drehstreckung* der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ um den *Streckfaktor* $r = \lvert c \rvert$ und den *Drehwinkel* $\mathit{Arg}\, c = \psi$.
- De Moivre's Formeln stellen die *komplexe Form der Additionstheoreme* der trigonometrischen Funktionen *sin* und *cos* dar. Insbesondere gelangt man zu den bekannten Addi-

tionsformeln für *sin* und *cos* , wenn man den Real- und Imaginärteil des Produktes $e^{i\cdot\varphi}\cdot e^{i\cdot\psi}$ mit dem Real- und Imaginärteil von $e^{i\cdot(\varphi+\psi)}$ vergleicht.

- Durch die Schreibweise $\boxed{e^{i\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)}$ (auch *Eulersche Formel* genannt) wird der enge Zusammenhang zwischen *Additionstheoremen* und *Potenzgesetzen* offenbar. Dass Euler hier $e^{i\cdot\varphi}$ verwendet, hat seinen tieferen Bezug zur *Exponentialfunktion* e^x, die wir später noch betrachten werden. Hier können wir die Eulersche Formel auch als Definition für den komplexen Term $e^{i\cdot\varphi}$ betrachten.

Die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl $a \in \mathbf{C}$

Die n-ten Einheitswurzeln:	Die Gleichung $z^n - 1 = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ hat in $\mathbf{C}$ genau n verschiedene Lösungen $\zeta_0, \zeta_1, ..., \zeta_{n-1}$, gegeben durch $$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \quad (k = 0, ..., n-1)$$ bzw. $$\zeta_k = e^{i\cdot\frac{2\pi\cdot k}{n}} \quad (k = 0, \ldots, n-1) \ .$$ $\zeta_0, \zeta_1, ..., \zeta_{n-1}$ heißen die *n-ten Einheitswurzeln*.
Die n-ten Wurzeln der Zahl $a \in \mathbf{C}$:	In $\mathbf{C}$ hat die Gleichung $$z^n - a = 0 \ (n \in \mathbf{N}) \ \text{ mit } \ a = r\cdot e^{i\varphi} = r\cdot\left(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)\right) \in \mathbf{C}$$ genau n verschiedene Lösungen z_0 , z_1 ,…, z_{n-1} mit: $$z_k = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$ bzw. $$z_k = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$

<u>*Skizze*</u>*:* (für den Fall $n = 6$)