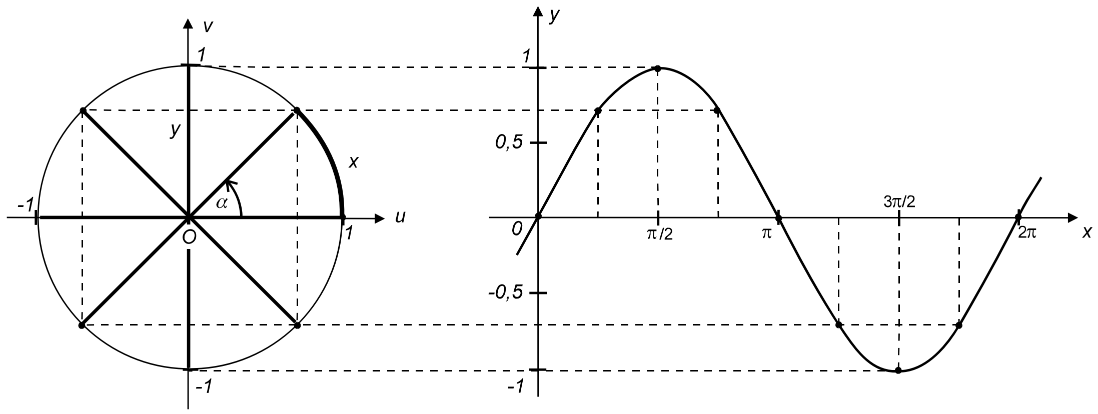
Skizze:



Wir werden die trigonometrischen *Funktionen* und ihre Umkehrfunktionen noch einmal intensiv im Rahmen der Theorie der *komplexen Zahlen* benutzen.

Einführung in die komplexen Zahlen

In der Geschichte der Mathematik stieß man im 16. Jh. im Zusammenhang mit der Suche nach Formeln zur Berechnung von Nullstellen von Polynomen höheren Grades auf Quadratwurzeln von *negativen Zahlen*. Ausschlaggebend war ein Lösungsverfahren für die kubische Gleichung $x^3 = p \cdot x \pm q$ mit natürlichen Zahlen $p,q \in \boldsymbol{N}$, welches vom Rechenmeister *Tartaglia* aus Italien stammte und vom italienischen Mathematiker *Cardano* 1545 veröffentlicht wurde. In dieser sogenannten *Cardanischen Lösungsformel* kann es passieren, dass Quadratwurzeln mit einem *negativen Radikanden* berücksichtigt werden müssen, um am Ende (mindestens) eine reelle Lösung als Ergebnis der Rechnung zu erhalten.

1777 trieb *Leonhard Euler* die komplexen Zahlen durch Einführung des Symbols i voran, indem er definierte: $i := \sqrt{-1}$. Euler nannte diese Quadratwurzel – im Gegensatz zu den *reellen* Zahlen – *imaginäre Einheit*. Die charakteristische Eigenschaft der neuen Zahl i ist also: $\boxed{i^2 = -1}$. (Siehe dazu auch die Skriptseite 12 im Zusammenhang mit der Lösung einer quadratischen Gleichung) Mittels dieser Zahl definieren wir weiter:

Definition:

Die Menge $\boxed{\boldsymbol{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \boldsymbol{R} \}}$ mit der imaginären Einheit i heißt der Zahlbereich der *komplexen Zahlen*. Er bildet hinsichtlich der (üblichen) Addition und Multiplikation unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ einen *Körper*. In ihm ist der „alte“ Zahlbereich $\boldsymbol{R}$ „eingebettet“ in der Form: $\boxed{\boldsymbol{R} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \boldsymbol{R}, y = 0 \} \subseteq \boldsymbol{C}}$.

Einen alternativen Zugang zu $\boldsymbol{C}$ hat der irische Mathematiker *Hamilton* im Jahre 1837 gefunden, indem er in der Menge $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \{(a,b) \mid a, b \in \boldsymbol{R}\}$ der *geordneten reellen Paare* $(a,b) \in \boldsymbol{R}^2$ die beiden Rechenoperationen *„Addition“* und *„Multiplikation“* einführte mittels:

(i) $\boxed{(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)}$ bzw. (ii) $\boxed{(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)}$.

Hamilton konnte damit zeigen, dass in $\boldsymbol{R}^2$ aufgrund dieser Definitionen dieselben Rechengesetze - also *Assoziativ-, Kommutativ-, Distributivgesetz* usw. - gelten wie in $\boldsymbol{R}$.

Setzt man jetzt $\boxed{i := (0{,}1)}$ und bettet mittels der *Identifikation* $\boxed{a := (a{,}0)}$ die „alten" reellen Zahlen $a \in \boldsymbol{R}$ in $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{R}^2,+,\cdot)$ ein, so gilt speziell:

(i) $i^2 = (0{,}1)\cdot(0{,}1) = (-1{,}0) = -1$ sowie

(ii) $z = (x,z) = (x{,}0) + (0,y) = (1{,}0)\cdot(x{,}0) + (0{,}1)\cdot(y{,}0) = x + i\,y$.

Also erhalten wir für $\boldsymbol{C}$ die „altbekannte" Darstellung (s.o.): $\boxed{\boldsymbol{C} = \{\, z = x + i\,y \mid x,y \in \boldsymbol{R} \,\}}$. Wir definieren weiter:

<u>*Definition:*</u>

- Ist $z = x + i\,y \in \boldsymbol{C}$, so heißt $x \in \boldsymbol{R}$ der *Realteil von* z (in Zeichen: $\boxed{\mathrm{Re}\,(z) := x}$) und $y \in \boldsymbol{R}$ der *Imaginärteil von* z (in Zeichen: $\boxed{\mathrm{Im}\,(z) := y}$).
- Die Zahl $\boxed{\bar{z} := x - i\,y}$ nennt man die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.
- Die (positive reelle) Zahl $\boxed{r = |z| := \sqrt{x^2 + y^2}}$ heißt der *Betrag* (oder *Modul*) *von* z .
- Die Menge $\boxed{arg\,(z) := \{\varphi + 2k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\}}$ mit $\boxed{\varphi = Arg\,(z) := \begin{cases} arccos\left(\dfrac{x}{r}\right), & \text{für } y \ge 0 \\ -arccos\left(\dfrac{x}{r}\right), & \text{für } y < 0 \end{cases}}$

  heißt das *Argument* (oder *Phase*) *von* z und $\varphi = Arg\,(z) \in (-180°, 180°]$ im *Gradmaß* bzw. $\varphi \in (-\pi, \pi]$ im *Bogenmaß* der *Hauptwert* von $arg\,(z)$. Wir schreiben auch:

  $arg\,(z) \equiv \varphi\ (2\pi)$ – in Worten: „*arg* (*z*) *ist kongruent* φ *modulo* 2π".

  Zur Beziehung zwischen *Gradmaß* und *Bogenmaß* siehe die Seiten 16 und 17 im Skript.
- Man beachte, dass $z = 0$ *kein Argument* besitzt. Dafür gilt ja: $\boxed{|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0}$. Weiterhin bezeichnet *arccos* in $\varphi = Arg\,(z)$ die *Umkehrfunktion* des Cosinus – *Arcus Cosinus* genannt –, für den man (z.B. auf dem *Taschenrechner*) auch die Bezeichnung cos^{-1} findet. In manchen Büchern wird zur Darstellung des Hauptwertes $\varphi = Arg\,(z)$ anstelle von *arccos* auch *arctan* bzw. tan^{-1} – das ist der *Arcus Tangens* – verwendet.

<u>*Geometrische Interpretation der komplexen Zahlen als Punkte der Gaußschen Ebene:*</u>

Die komplexen Zahlen $z = x + i\cdot y \in \boldsymbol{C}$ können mit den Punkten der (zweidimensionalen) *komplexen* – oder wie man sagt: *Gaußschen* – *Zahlenebene* identifiziert werden (s. dazu die *Skizze* auf der folgenden Seite).

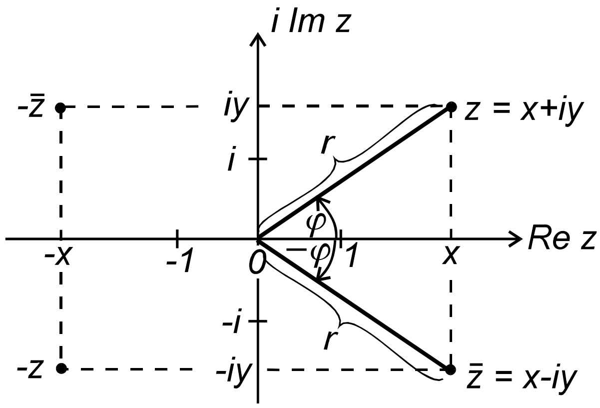
- $x = Re\ z$ und $y = Im\ z$ interpretiert man als die *kartesischen Koordinaten* des „Punktes" $z \in \boldsymbol{Z}$. Damit entsprechen den rein *reellen Zahlen* $z = x \in \boldsymbol{R}$ die Punkte auf der waagerechten *reellen Achse* und den rein *imaginären Zahlen* $z = i\,y \in \boldsymbol{C}$ die Punkte auf der vertikalen *imaginären Achse*.
- Auch der Betrag $r = |z|$ und das Argument $arg\,(z)$ bzw. sein Hauptwert $\varphi = Arg\,(z)$ besitzen in der komplexen Zahlenebene eine geometrische Interpretation:

  $r = |z|$ beschreibt den *euklidischen Abstand* des Punktes z vom *Koordinatenursprung* $z_0 = 0$, während $\varphi = Arg\,(z)$ den *positiv* – d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn – *orientierten Winkel* im Grad- oder Bogenmaß unter Beachtung des Vorzeichens von φ bezeichnet, den die vom Ursprung $z_0 = 0$ ausgehende und durch z verlaufende Halbgerade mit der positiven reellen Achse einschließt.

Damit liefern die *Polarkoordinaten* r und φ neben den *kartesischen Koordinaten* x und y eine zweite eindeutige Beschreibung der komplexen Zahlen $z \in \mathbf{C}$ bzw. der ihnen entsprechenden Punkte der Gaußschen Zahlenebene. Man beachte dabei, dass φ nur eindeutig bis auf Vielfache von 360° bzw. $2 \cdot \pi$ – genauer: *„eindeutig modulo $2 \cdot \pi$"* – ist.

- Der zu z konjugiert komplexen Zahl $\boxed{\bar{z} = x - i\,y}$ entspricht geometrisch in der komplexen Zahlenebene das *Spiegelbild* des „Punktes" z an der *reellen Achse* $y = 0$. Analog „ist" $\boxed{-\bar{z} = -x + i\,y}$ das *Spiegelbild* von z an der *imaginären Achse* $x = 0$, während $\boxed{-z = -(x + i\,y)}$ aus z durch *Punktspiegelung* an dem Koordinatenursprung $z_0 = 0$ entsteht.

<u>*Skizze*</u>:



Für den Betrag und das Argument dieser Zahlen gilt insbesondere:

(i) $\boxed{|z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| = |-z|}$, (ii) $\boxed{\arg(\bar{z}) = -\arg(z)}$,

(iii) $\boxed{\arg(-\bar{z}) = 180^\circ - \arg(z)}$ bzw. $\boxed{\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z)}$ und

(iv) $\boxed{\arg(-z) = \arg(z) + 180^\circ}$ bzw. $\boxed{\arg(-z) = \arg(z) + \pi}$.

Die Rechengesetze in C

In $\mathbf{C}$ gelten speziell folgende *Regeln* für das *Rechnen* mit komplexen Zahlen $z = x + i\,y \in \mathbf{C}$ und $w = u + i\,v \in \mathbf{C}$, wie sie ganz analog auch für die reellen Zahlen gelten. Daher nennt man $\mathbf{C}$ auch einen „Körper". Die einzelnen Rechengesetze lauten:

Rechenoperation:	***Gesetze:***
Addition / Subtraktion :	$z \pm w = (x \pm u) + i\,(y \pm v)$
Multiplikation:	$z \cdot w = (xu - yv) + i\,(xv + yu)$

Division (Kehrwert):	$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$, $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i \, \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}$
Konjugieren von Summen / Produkten:	$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, $\bar{\bar{z}} = z$
Real- und Imaginärteil mittels z und $\bar{z}$ dargestellt:	$Re\,(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad Im\,(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ Insbesondere folgt: $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow Im\, z = 0$
Gesetze für den Betrag:	*(i)* $\lvert z \rvert = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \in \mathbf{R}$, *(ii)* $\lvert z \rvert = \lvert \bar{z} \rvert$, *(iii)* $\lvert z \rvert \geq 0$ *und* $\lvert z \rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (*positive Definitheit*) , *(iv)* $\lvert z \cdot w \rvert = \lvert z \rvert \cdot \lvert w \rvert , \left\lvert \frac{z}{w} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert w \rvert}$ (*Homogenität*) , *(v)* $\lvert z + w \rvert \leq \lvert z \rvert + \lvert w \rvert , \big\lvert \lvert z \rvert - \lvert w \rvert \big\rvert \leq \lvert z - w \rvert$ (*Dreiecksungleichungen*) .

<u>Bemerkungen</u>:

- Im Wesentlichen läuft die Addition, Subtraktion und Multiplikation von komplexen Zahlen nach den Gesetzen der Termrechnung unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$.
- Die Division mit Erweiterung des konjugiert komplexen Nenners fußt (wieder einmal) auf dem *3. Binom*, wie auch die Formel $\lvert z \rvert^2 = z \cdot \bar{z}$ zur Berechnung des Betrags/Moduls einer komplexen Zahl. Dies rechtfertigt das eigene Symbol für die *komplex konjugierte Zahl*.
- Die Probe von Vieta im Fall zweier konjugiert komplexer Nullstellen z_1 und $z_2 = \bar{z}_1$ schreibt sich dann auch, wie folgt:
  (i) $z_1 + z_2 = z_1 + \bar{z}_1 = 2 \cdot Re\,(z_1) = -\frac{b}{a}$, (ii) $z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 = \lvert z_1 \rvert^2 = \frac{c}{a}$.

Die geometrische Interpretation komplexer Zahlen als Vektoren

Verbindet man den Koordinatenursprung $z_0 = 0$ der *Gaußschen Zahlenebene* mit jedem der Punkte $z \in \mathbf{C}$ dieser Ebene durch einen *gerichteten Pfeil* von z_0 nach z , so erhält man für die komplexen Zahlen $z \in \mathbf{C}$ eine weitere Interpretation, nämlich die der *zweidimensionalen Vektoren* – genauer: *Ortsvektoren.*

- Die *Komponenten* des *Vektors*, welcher die komplexe Zahl $z \in \mathbf{C}$ repräsentiert, sind gerade die *kartesischen Koordinaten* $x = Re\,(z)$ und $y = Im\,(z)$ von z .
- Entsprechend beschreiben die *Polarkoordinaten* $r = \lvert z \rvert$ und $\varphi = Arg\,(z)$ von z die *Länge* und *Richtung* dieses die komplexe Zahl z repräsentierenden (Orts-)Vektors.