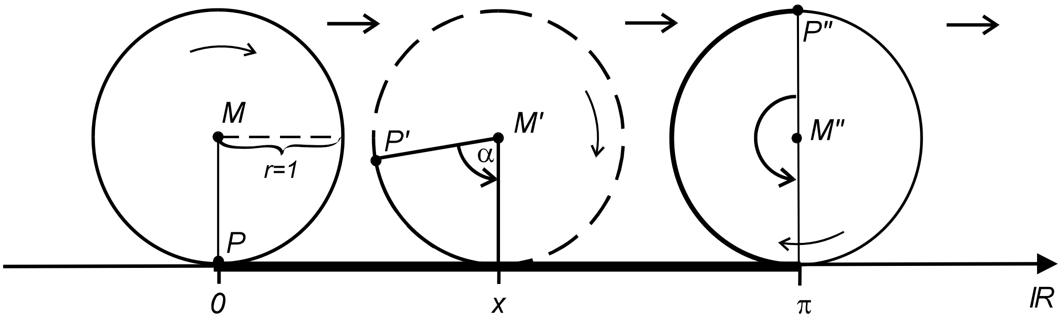
<u>Skizze</u>:



Ursprünglich bezeichnet die Zahl π das Verhältnis von Umfang u zum Durchmesser d eines (beliebigen) Kreises K_r mit gegebenem Radius $r>0$ - also: $\boxed{\pi = \frac{u}{d}}$. Dabei gilt für den *Umfang* u und den *Flächeninhalt* F von K_r unter Rückgriff auf die Bogenlänge der geschlossenen Kreislinie allgemein: $\boxed{u = 2\pi \cdot r \quad , \quad F = \pi \cdot r^2}$.

Wir werden im Folgenden zunächst das *Gradmaß* verwenden.

Die Umrechnungsformeln zwischen Gradmaß $\alpha\,[°]$ und Bogenmaß $x = arc\,(\mathcal{W})$ eines Winkelfeldes $\mathcal{W}$ lauten:

$$\boxed{x = arc(\mathcal{W}) = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha[°]} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\alpha[°] = \frac{180°}{\pi} \cdot x} \quad .$$

Die folgende Tabelle enthält einige „charakteristische“ Werte im Bogen- und Gradmaß:

$\alpha\,[°]$	$360°$	$270°$	$180°$	$90°$	$60°$	$45°$	$36°$	$30°$	$22{,}5°$
$x = arc\,(\alpha)$	2π	$\frac{3}{2}\pi$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$

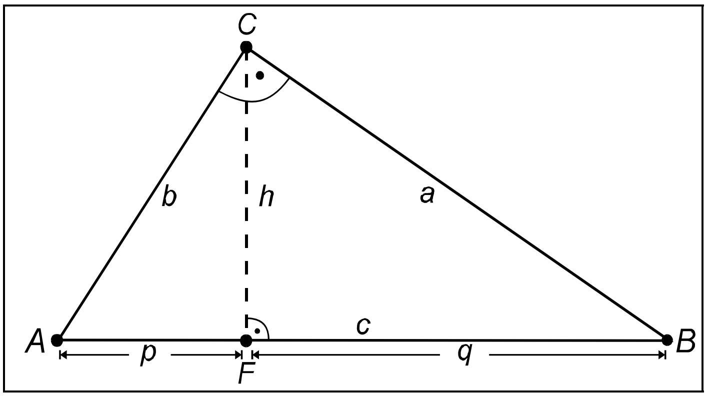
$\alpha\,[°]$	$20°$	$18°$	$15°$	$12°$	$10°$	$9°$	$6°$	…	$1°$
$x = arc\,(\alpha)$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{15}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{30}$	…	$\frac{\pi}{180}$

<u>Bemerkung</u>:
Im Bereich der *Vermessungstechnik*, speziell der *Geodäsie*, greift man auch auf *Neugrad* zurück. Dabei entspricht der Einheit *1 gon* der 100. Teil eines rechten Winkels. Der Vollwinkel misst dann *400 gon* . Wir werden später zur Angabe des Arguments *arg z* einer komplexen Zahl jedoch nebeneinander die beiden Varianten (*Alt-*)*Grad* und *Bogenmaß* verwenden.

Sätze im rechtwinkligen Dreieck

Gegeben sei im Folgenden das rechtwinklige Dreieck ΔABC mit $\gamma = 90°$. Dann heißt die Seite c die *Hypotenuse*, die Seiten a und b heißen die *Katheten* des Dreiecks ΔABC.

Skizze:



Ist h die *Höhe* von C auf AB mit Höhenfußpunkt $F \in \overline{AB}$, so heißen die beiden durch F entstehenden Teile p und q von c die durch h erzeugten *Hypotenusenabschnitte*.

Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC gelten nun die folgenden (klassischen) Sätze:

Satz	***Formel***
Höhensatz des Euklid	$h^2 = p \cdot q \quad (\gamma = \frac{\pi}{2})$
Kathetensatz des Euklid	$a^2 = c \cdot q \;,\quad b^2 = c \cdot p \quad (\gamma = \frac{\pi}{2})$
Satz des Pythagoras	$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\gamma = \frac{\pi}{2})$

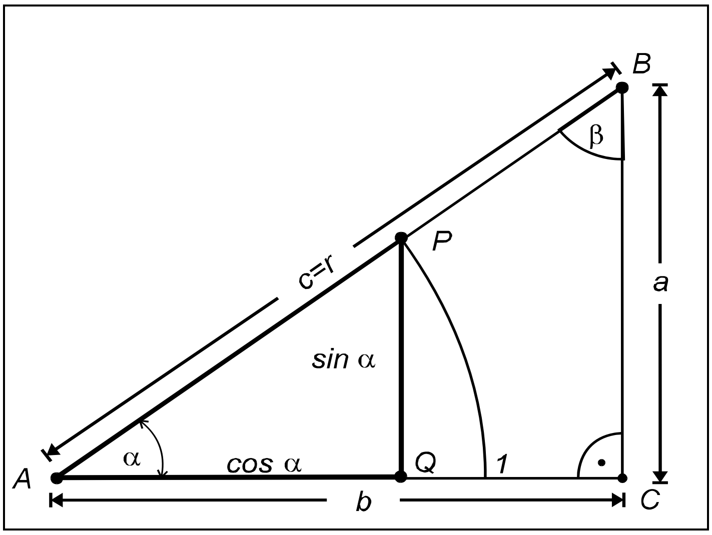
Die trigonometrischen Funktionen im Dreieck

Sei ΔABC ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$, *Hypotenuse* $c = r$, *Katheten* a und b sowie den *komplementären Winkeln* α und β, für welche wegen der Winkelsumme im Dreieck gilt: $\alpha + \beta = 180° - \gamma = 90°$ und damit für $\beta: \beta = 90° - \alpha$.

Im Dreieck ΔABC lassen sich nun die *trigonometrischen Funktionen*, wie folgt, einführen (s. Skizze):

$$\boxed{\sin \alpha := \frac{a}{r}},\quad \boxed{\cos \alpha := \frac{b}{r}},\quad \boxed{\tan \alpha := \frac{a}{b}} \quad \text{und} \quad \boxed{\cot \alpha := \frac{b}{a}}$$

Skizze:



$$\boxed{\sin\beta = \frac{b}{r} = \cos\alpha} \quad \text{sowie} \quad \boxed{\cos\beta = \frac{a}{r} = \sin\alpha}$$

Daraus erklärt sich die Bezeichnung *Cosinus* als Abkürzung für *„Sinus complementarii"*
(= Sinus des Komplementärwinkels).

Bemerkungen:

- Bezeichnet man die Seite a - wie üblich - als *Gegenkathete* und die Seite b als *Ankathete* zu α, so ergeben sich folgende *Merkformeln* für die trigonometrischen Funktionen:

$$\boxed{\sin\alpha := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}\,, \quad \boxed{\cos\alpha := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}}\,,$$

$$\boxed{\tan\alpha := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}}\,, \quad \boxed{\cot\alpha := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}}$$

- Weiterhin erhält man durch Einsetzen: $\boxed{\tan\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$, $\boxed{\cot\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}}$.

- Bezüglich des *Wertebereichs* der trigonometrischen Funktionen folgt für $\alpha \in [0,\, 90°]$ [1]:

$$\sin\alpha,\ \cos\alpha \in [0,1] \ \text{ sowie } \ \tan\alpha,\ \cot\alpha \in [0,\infty)\,.$$

- Verwendet man anstelle des Winkelgradmaßes $\alpha\,[°]$ das *Bogenmaß* x, so gilt:

$$\alpha \in [0,\, 90°] \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\, 0\,, \frac{\pi}{2} \,\right].$$

Mittels elementargeometrischer Betrachtungen erhält man dann unter Verwendung des Symbols ∞ für „Unendlich" folgende *Werte* für *sin, cos, tan* und *cot* zu den folgenden speziellen im Bogenmaß angegebenen Winkeln x :

[1] Wir verwenden dabei die *Intervallschreibweise* $[a,b] = \{\, x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b \,\}$ für gegebene reelle Zahlen $a,b \in \mathbf{R}$ sowie $[a,\infty) = \{\, x \in \mathbf{R} \mid a \le x \,\}$ im Fall der nach oben unbeschränkten Menge.

Winkel x	**0**	**π/6**	**π/4**	**π/3**	**π/2**
sin x	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
cos x	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
cot x	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Trigonometrische Sätze im allgemeinen Dreieck

Es sei ΔABC ein beliebiges Dreieck mit Seitenlängen a,b,c und Winkeln α,β,γ. Dann gelten die folgenden allgemeinen Sätze (siehe dazu die Skizze auf der nächsten Seite):

Satz	**Formel**
Sinussatz	$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$
Kosinussatz	$a^2=b^2+c^2-2\cdot bc\cdot\cos\alpha$

Skizze: