Über die Lösungen einer reellen Gleichung höheren Grades

Neben der quadratischen bzw. biquadratischen Gleichung möchte man gerne allgemeine *algebraische Gleichungen* mit reellen *Koeffizienten* der Form

(∗) $\boxed{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0}$ mit $a_k \in \mathbf{R}$, $a_m \neq 0$ $(k = 1, \ldots m)$

lösen. Die Mathematiker im 16./17. Jh. haben allgemeine Lösungsformeln für die Fälle $m = 3$ (*kubische* Gleichung) und $m = 4$ entdeckt bzw. entwickelt. Doch konnte man im 19. Jh. beweisen, dass es für $m \geq 5$ keine allgemeinen Lösungsformeln mehr zur Berechnung der *Wurzeln* $x \in \mathbf{C}$ der Gleichung (∗) gibt. Man nennt die Lösungen $x \in \mathbf{C}$ von (∗) auch die *Nullstellen* des Polynoms $p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$.

Als erster hat der deutsche Mathematiker *C.F. Gauß* den sogenannten *Fundamentalsatz der Algebra* bewiesen, nach dem *jede* Gleichung (∗) mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbf{R}$ genau m Lösungen besitzt, wenn man den Zahlbereich $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen erweitert. Dabei können Wurzeln auch *mehrfach* auftreten, müssen also nicht notwendig paarweise verschieden sein. Diese Wurzeln oder Nullstellen gehören aber i.a. dem größeren Zahlbereich $\mathbf{C}$ der *komplexen Zahlen* an.

Trotz fehlender *allgemeiner Lösungsformel* kann man bei der Suche nach den Nullstellen eines (reellen) Polynoms eine Erfolg versprechende Taktik anwenden, insbesondere wenn es sich um ein *ganzzahliges* Polynom $p(x) \in \mathbf{Z}[x]$ – das ist ein *reelles* Polynom $p(x)$ mit *ganzzahligen Koeffizienten* $a_k \in \mathbf{Z}$ – handelt, welches u.a. *rationale Nullstellen* besitzt.

Die Taktik, um die Gleichung (∗) $\boxed{p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0}$ konkret zu lösen, besteht aus der Hintereinanderausführung der folgenden Schritte:

(i) Finde zunächst durch *„intelligentes Raten“* (siehe unten) eine *rationale* Nullstelle x_0 aus dem zu (∗) gehörigen *rationalen Nullstellen-Pool* unter Verwendung des *Hornerschemas* (siehe S. 2 des Skripts).

(ii) Führe zu jeder gefundenen Nullstelle x_0 dann die *Polynomdivision* des betrachteten Polynoms $p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ durch den Linearterm $x - x_0$ durch. Diese Polynomdivision geht auf und liefert nun ein ganzzahliges Polynom $q(x) = b_{m-1} \cdot x^{m-1} + b_{m-2} \cdot x^{m-2} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0 \in \mathbf{Z}[x]$ vom Grad $m-1$. Auch hierbei ist *Horner* das Mittel der Wahl (siehe S. 5 des Skripts).

(iii) Setze nun die Schritte (i) und (ii) mit dem neuen Polynom $q(x)$ fort (sogenannter *kaskadierter Horner*), bis man schließlich – hoffentlich – auf eine *quadratische Gleichung* stößt. Beachte, dass eine gefundene Nullstelle nach der Polynomdivision nochmals gestestet werden muss, da sie *mehrfach* auftreten könnte.

(iv) Die (evtl. komplexen) Lösungen der zuletzt gewonnen quadratischen Gleichung kann man dann explizit mit der angegebenen *abc*- oder der *pq-Formel* (siehe S. 11/12 des Skripts) berechnen.

Das *intelligente Raten* ist eigentlich ein gezieltes Durchprobieren aller möglichen *rationalen Nullstellen* $x_0 \in \mathbf{Q}$ von $p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \in \mathbf{Z}[x]$ und fußt auf dem folgenden notwendigen Kriterium für rationale Nullstellen:

$$(**)\quad \boxed{p(x_0)=0 \;\text{ für }\; x_0=\frac{r}{s}\in\mathbf{Q} \;\Rightarrow\; r\mid a_0 \;\text{ und }\; s\mid a_m} \;.$$

Dabei steht „$|$" für „*teilt ganzzahlig*"; also:

$a\mid b$ für $a,b\in\mathbf{Z}$:⇔ „*a ist ein Teiler von b*" ⇔ $b=a\cdot d$ mit $d\in\mathbf{Z}$ geeignet.

Für den rationalen Nullstellen-Pool N_p gilt dann also: $\boxed{N_p=\left\{x_0=\frac{r}{s}\in\mathbf{Q}\;\middle|\; r\mid a_0\wedge s\mid a_m\right\}}$.

Man beachte bei der Erstellung aller möglichen Kombinationen auch, dass beide möglichen Vorzeichen „+/–" auftreten können.

<u>*Beispiel*</u>*:*

Wir suchen die *faktorisierte Darstellung* des Polynoms $\boxed{y=p(x)=2x^4+3x^3+3x-2}$:

Zunächst erkennen wir, dass $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$ ein ganzzahliges Polynom ist. Also können wir versuchen, rationale Nullstellen zu erraten. Es gilt hier: $\boxed{a_4=2\,,\,a_0=-2}$.

Nach (**) gilt dann: $p(x_0)=0$ für $x_0=\frac{r}{s}\in\mathbf{Q} \Rightarrow r\mid -2$ und $s\mid 2$, d.h. $r,s\in\{\pm1,\pm2\}$. Das ergibt als möglichen rationalen Nullstellen-Pool: $\boxed{N_p=\left\{+1,-1,+2,-2,+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}}$.

Wir spielen nun exemplarisch den Horner durch mit einer der möglichen Nullstellenkandidaten aus N_p und zeigen dabei, wie Horner die Polynomdivision durch $(x-x_0)$ anzeigt:

$$\begin{array}{r|ccccc} & 2 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ \hline \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 0 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \\ + & 2 & 2 & -1 & \frac{7}{2} & -\frac{15}{4} \\ \hline \end{array}$$

Dies sind die Koeffizienten von $y=p(x)$

$$\Rightarrow \boxed{y=p\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{4}}$$

Außerdem ist $\boxed{y=p(x)=\left(2x^3+2x^2-x+\frac{7}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{15}{4}\right)}$ das Ergebnis der Polynomdivision von $y=p(x)=2x^4+3x^3+3x-2$ durch den linearen Term $\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Also scheidet $x_0=-\frac{1}{2}\in N_p$ als Nullstelle von $y=p(x)$ aus. Nun aber weiter:

$$\begin{array}{r|ccccc} & 2 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ \hline \cdot\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ + & 2 & 4 & 2 & 4 & \mathbf{0} \\ \hline \cdot(-2) & 0 & -4 & 0 & -4 & \\ + & 2 & 0 & 2 & \mathbf{0} & \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1=\frac{1}{2}},\quad y=p(x)=\left(2x^3+4x^2+2x+4\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2=-2},\quad y=p(x)=\left(2x^2+2\right)\cdot(x+2)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Das quadratische Polynom $\boxed{q(x) = 2x^2 + 2 = 2 \cdot (x^2 + 1)}$ hat aber keine reellen Nullstellen mehr. Somit haben wir die letzendliche (reelle) *Faktorisierung* des Polynoms $y = p(x)$ in der Weise gefunden, dass gilt:

$$\boxed{y = p(x) = 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot (x + 2) \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right)} .$$

Zur Konstruktion von Polynomen mit vorgegebenen Funktionswerten

Die faktorisierte Darstellung eines Polynoms mithilfe seiner (eventuell komplexen) Nullstellen ist sehr nützlich, um bei vorgegebenen $n+1$ Funktionswerten y_k ($k = 1, \ldots, n+1$) das zugehörige eindeutige Polynom $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ vom Grad $\le n$ zu finden, welches an den jeweils gegebenen *Stützstellen* x_k genau die vorgebenenen Funktionswerte y_k ($k = 1, \ldots, n+1$) besitzen soll. Dieses gesuchte Polynom erfüllt also die $n+1$ Gleichungen $y_k = p(x_k)$ für $k = 1, \ldots, n+1$. Dieses gesuchte Polynom mit den beschriebenen Vorgaben heißt auch das *Lagrangesche Interpolationspolynom*.

Dazu konstruiert man zunächst die $n+1$ elementaren *Lagrangepolynome*

$$\boxed{l_k(x) := \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{n+1} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} = \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{n+1})}} , \quad k = 1, \ldots, n+1 .$$

Für diese Polynome gilt dann: $l_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \ne k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$ sowie *grad* $l_k = n$ ($k = 1, \ldots, n+1$).

Abschließend bildet man die Summe

$$\boxed{p(x) := \sum_{k=1}^{n+1} y_k \cdot l_k(x) = y_1 \cdot l_1(x) + y_2 \cdot l_2(x) + \ldots + y_{n+1} \cdot l_{n+1}(x)} .$$

Dieses Polynom p besitzt dann die geforderte Eigenschaft *grad* $p \le n$ und $y_k = p(x_k)$ für $k = 1, \ldots, n+1$, *interpoliert* also die an den $n+1$ Stützstellen x_k vorgegebenen Funktionswerte y_k.

Fügt man übrigens eine neue Stützstelle x_{n+2} mit zugehörigem Funktionswert $y_{n+2} = p(x_{n+2})$ hinzu, so muss man die bisherigen elementaren Lagrangepolynome l_k für $k = 1, \ldots, n+1$ leicht modifizieren und ein neues Lagrangepolynom hinzufügen. Die neuen Lagrangepolynome $\tilde{l}_k$, $k = 1, \ldots, n+2$ ergeben sich in folgender Weise für $k = 1, \ldots, n+1$:

$$\boxed{\tilde{l}_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{n+2} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} = \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n+2})}{(x_k - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{n+2})} = l_k(x) \cdot \frac{x - x_{n+2}}{x_k - x_{n+2}}}$$

sowie $$\boxed{\tilde{l}_{n+2}(x) := \prod_{i=1}^{n+1} \frac{(x - x_i)}{(x_{n+2} - x_i)} = \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n+1})}{(x_{n+2} - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_{n+2} - x_{n+1})}} .$$

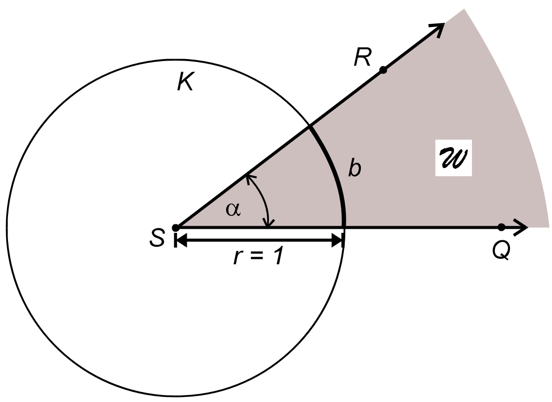
Zum Bogenmaß und Gradmaß

Wir wollen uns nach den Polynomen nun der nächsten Gruppe wichtiger Elementarfunktionen zuwenden: den trigonometrischen Funktionen (*Trigonometrie* $=$ *Dreiecksmessung*). Dazu benötigen wir zunächst die Winkelmessung. Der Winkelmessung eines Winkels (oder Winkelfeldes) $\mathcal{W} = \sphericalangle QSR$ mit Scheitelpunkt S (siehe nachfolgende Skizze) im *Gradmaß* $\alpha\,[°]$ liegt die Einteilung der geschlossenen Kreislinie K des sogenannten *Einheitskreises* mit Mittelpunkt S und Radius $r = 1$ in 360 gleich große Teile zugrunde. Jedem dieser 360 Kreislinienteile entspricht dann das Gradmaß $1°$ (lies: *„1 Grad“*). Verfeinerungen der Unterteilung sind $1° = 60'$ (lies: *„60 Minuten“*) und $1' = 60''$ (lies: *„60 Sekunden“*).

<u>*Bemerkungen:*</u>

- Das *Gradmaß* $\alpha\,[°]$ des Winkelfeldes $\mathcal{W}$ beschreibt also das Maß des anteiligen Kreisbogens von K – in Bezug auf 360^o als Maß für die Vollkreislinie –, der von dem Winkelfeld $\mathcal{W}$ aus K ausgeschnitten wird.
- Das dimensionslose *Bogenmaß* $arc\,(\mathcal{W})$ des Winkelfeldes $\mathcal{W}$ wird eingeführt als Länge b des anteiligen Kreisbogenstücks von K, der im Winkelfeld $\mathcal{W}$ gelegen ist, nach der Formel: $\boxed{x = arc(\mathcal{W}) := b}$.
- Auf dem Taschenrechner kennzeichnet die Taste / Einstellung $\boxed{DEG}$ die Messung eines Winkels in Grad (*DEG* für engl. *degree*). Dem gegenüber befindet sich zur Kennzeichung der Winkelmessung mittels Bogenmaß auf dem Taschenrechner die Taste / Einstellung $\boxed{RAD}$ für *radiant*.

<u>*Skizze zum Bogenmaß:*</u>



Anschaulich erhält man die *Bogenlänge* eines Kreisbogens bzw. Kreisbogenstücks auf dem Einheitskreis K durch Abrollen von K auf einer horizontalen Geraden. Eine näherungsweise zeichnerische Konstruktion der Bogenlänge des halben Kreisumfangs - *„Abwicklung des Kreises“* genannt - liefert die Ende des 17. Jh. entwickelte sogenannte *Kochanski-Konstruktion*. Schließlich beachte man, dass mit π (sprich: *„Pi“*) speziell die *Bogenlänge der „halben“ Vollkreislinie* K bezeichnet wird.