Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik

StR.i.HD. A. Gündel-vom Hofe

WiSe 2016/2017
SoSe 2017

Formelsammlung zur „Mathematik I+II für die Berufliche Fachrichtungen“

Die b-adische Darstellung rationaler Zahlen

Wir beginnen zunächst mit der Darstellung von ganzen Zahlen $x \in \mathbf{Z}$ bezüglich einer beliebigen Zahlenbasis $b \in \mathbf{N}$, $b \geq 2$. Wir nennen dies die Darstellung im *b-adischen System*.

Die Darstellung ganzer Zahlen bezügl. verschiedener Basen	
Definition der b-adischen Darstellung einer ganzen Zahl:	$b \in \mathbf{N}$, $b \geq 2$ sei *Basis*, $Z = \{0,\ldots,b\text{-}1\}$ die Menge der zugehörigen *Ziffern*, z.B.: $Z = \{0,\ldots,9\}$ für $b = 10$ (*Dezimal*system), $Z = \{0,1\}$ für $b = 2$ (*Binär*system), $Z = \{0,\ldots,9,A,\ldots,F\}$ für $b = 16$ (*Hexadezimal*system). Für die *b-adische Darstellung* von $x \in \mathbf{Z}$ gilt dann: $x = \pm\left(a_m a_{m-1} \ldots a_0\right)_b := \pm(a_m \cdot b^m + a_{m-1} \cdot b^{m-1} + \ldots + a_0 \cdot b^0)$ mit $a_m \neq 0$, $a_k \in Z$ für $k = 0,\ldots,m$.
Gewinnung der b-adischen Darstellung einer Zahl $x \in \mathbf{N}$:	Fortgesetzte (ganzzahlige) Division von $x \in \mathbf{Z}$ durch b mit Rest liefert: $x = c_1 \cdot b + a_0$; $c_1 = c_2 \cdot b + a_1$; … ; $c_m = 0 \cdot b + a_m$ mit $0 \leq a_k < b$ Dann ist $x = \left(a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0\right)_b$ die b-adische Darstellung von x.
Das kleine Eins-plus-Eins und Ein-mal-Eins im Binärsystem:	Im Fall des Rechnens im System mit Basis $b = 2$ gilt: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 + 1 = (\mathbf{10})_2$, $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.
Umwandlung einer Binärzahl in die Darstellung mit Zweierpotenzbasis:	Sei $x = \left(a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0\right)_2$ Binärzahl mit $a_k \in \{0,1\}$, $k = 0,\ldots,m$ und $a_m = 1$ sowie $b = 2^n$ ($n \in \mathbf{N}$) eine neu gewählte Basis. Dann erhält man die Darstellung von x bezügl. b durch (i) *rechtsbündiges* Zusammenfassen der Binärziffern von x in Blöcke der Länge n bei evt. Auffüllen des letzten (linken) Blockes mit Nullen und (ii) Umwandlung der einzelnen Blöcke in b–Ziffern. Also erhält man $x = \left(b_r b_{r-1} \ldots b_1 b_0\right)_b$, wobei für $k = 0,\ldots,r$ gilt: $b_k = a_{(k+1)\cdot n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_{k\cdot n+1} \cdot 2^1 + a_{k\cdot n} \cdot 2^0$

<u>Bemerkungen</u>:

- Zur *Umrechnung* einer gegebenen *Dezimalzahl* $x \in \boldsymbol{Z}$ *in die b-adische Darstellung* zu einer gegebenen Basis $b > 1$ mittels fortgesetzten Teilens mit Rest kann man die *Operatoren* „DIV" für den ganzzahligen Anteil der Zahl b in x sowie „MOD" für den Rest beim Teilen von x durch b verwenden. Zum Beispiel gilt:

  23 DIV $7 = 3$, 23 MOD $7 = 2$; denn: $23 = 3 \cdot 7 + 2$,

  -23 DIV $7 = -4$, -23 MOD $7 = 5$; denn: $-23 = (-4) \cdot 7 + 5$.

- Zur *Umrechnung* einer *b-adischen Zahldarstellung* der Form $x = \left(a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0\right)_b$ *ins Dezimalsystem* hilft das folgende *Hornerschema*, welches auf einer geschickten Umklammerung des b-adischen Ausdrucks $x = a_m \cdot b^m + a_{m-1} \cdot b^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot b + a_0$ beruht.

Das Hornerschema	
Umklammerung des Ausdrucks:	Für gegebene Zahlen $a_k \in \boldsymbol{R}$, $x \in \boldsymbol{R}$ gilt: $a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 =$ $(\ldots((a_m \cdot x + a_{m-1}) \cdot x + a_{m-2}) \cdot x \ldots + a_1) \cdot x + a_0$
Algorithmische Form:	Setze: $c_m = a_m$; $c_{k-1} = c_k\, x + a_{k-1}$ für $k = m, \ldots, 1$ (k also rückwärts laufend !!). Dann ist $\boldsymbol{c_0}$ das Ergebnis.
Schema:	$\begin{array}{lcccccc} & a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \hline \text{Produkte:} & 0 & c_m \cdot x & c_{m-1} \cdot x & \ldots & c_2 \cdot x & c_1 \cdot x \\ \hline \text{Summen:} & c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & \ldots & c_1 & \boldsymbol{c_0} \\ \hline \end{array}$

<u>Bemerkungen</u>:

- Man füllt im Hornerschema sukzessive die beiden unteren Zeilen *spaltenweise von links nach rechts* aus. Das Ergebnis $\boldsymbol{c_0}$ steht dann in der *rechten unteren Ecke*.
- Das Hornerschema zur Berechnung der b-adischen Darstellung einer Zahl $x \in \boldsymbol{Z}$ kommt mit maximal $2m$ *Rechenoperationen* aus, nämlich m *Multiplikationen* und m *Additionen*. Damit ist dieser Algorithmus äußerst geeignet für die Implementierung auf einem Computer.

Rechengesetze (Körperaxiome) der reellen Zahlen

	Gesetze der Addition	**Gesetze der Multiplikation**
Assoziativgesetz:	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Kommutativgesetz:	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Existenz eines neutralen Elements:	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Existenz von inversen Elementen:	$x + (-x) = 0$	$x \cdot x^{-1} = 1$ für $x \neq 0$ mit $x^{-1} = 1/x$
Distributivgesetz:	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	

<u>*Satz:*</u>

Aus den Rechengesetzen folgt u.a. für beliebige reelle Zahlen $x,y,z \in \boldsymbol{R}$:

(i) $\boxed{x \cdot 0 = 0}$ sowie (ii) $\boxed{x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -xy\ , (-x) \cdot (-y) = xy}$ (*Vorzeichenregeln*) und
(iii) $\boxed{(x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \Rightarrow x \cdot y \neq 0}$ bzw. $\boxed{x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)}$ (*Nullteilerfreiheit* in $\boldsymbol{R}$).

<u>*Bemerkungen*</u>*:*

- Jeder Zahlenbereich, der die angegebenen Rechengesetze erfüllt, heißt ein *Körper*: Insbesondere sind also die Zahlbereiche $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{Q}$ Körper, $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{Z}$ hingegen *nicht*.
- Ein wichtiger Spezialfall für die Klammerrechnung als Anwendung des Distributivgesetzes sind die *Binomischen Formeln*:

  1. Binom: $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot ab + b^2}$ für $a,b \in \boldsymbol{R}$ beliebig,

  2. Binom: $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot ab + b^2}$ für $a,b \in \boldsymbol{R}$ beliebig,

  3. Binom: $\boxed{(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2}$ für $a,b \in \boldsymbol{R}$ beliebig.

- Mit den Binomischen Formeln eng verbunden ist die sogenannte *quadratische Ergänzung*, bei der ein unvollständiger binomischer Term durch Addition eines geeignet gewählten Quadratterms zu einem vollständigen binomischen Term ergänzt wird. Im Fall der ersten beiden Binome:

  $\boxed{a^2 + 2 \cdot ab = a^2 + 2 \cdot ab + b^2 - b^2 = (a+b)^2 - b^2}$ bzw.

  $\boxed{a^2 - 2 \cdot ab = a^2 - 2 \cdot ab + b^2 - b^2 = (a-b)^2 - b^2}$.

Rechengesetze für Brüche

Für beliebige (reelle) Zahlen $a,b,c,d \in \boldsymbol{R}$ bzw. Terme mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ gilt:

Bruchoperation:	***Ergebnis:***
Gleichheit von Brüchen	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$

Erweitern / Kürzen	$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}\quad (c\neq 0)$
Addition / Subtraktion	$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d\pm b\cdot c}{b\cdot d}$
Multiplikation	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$
Division	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad (c\neq 0)$

Bemerkung:
Bei der *Addition* und *Subtraktion* von Brüchen ist die Suche nach dem *Hauptnenner* enorm wichtig. Dieser ist i.a. das *kleinste gemeinsame Vielfache* (*kgV*) aus den Nennern der einzelnen beteiligten Brüche und kann nach folgender *Methode* ermittelt werden kann:

- Zerlege zunächst jeden Nenner in seine Bestandteile (*Faktorisierung*).
- Bilde dann das „Minimal"-Produkt - also das *kgV* - aus den Einzelbestandteilen der verschiedenen Nenner der beteiligten Brüche, so dass jeder von ihnen in diesem Produkt enthalten ist. Das ist der *Hauptnenner*.
- Ermittle dann aus dem Hauptnenner für jeden Bruch den *Erweiterungsterm*, mit dem dieser auf den Hauptnenner gebracht werden muss.
- Am Ende addiere die Zählerterme der gleichnamigen Brüche zusammen und versuche, mittels Faktorisierung des Zählers noch den Ergebnisbruchterm zu kürzen, wenn möglich.

Polynomdivision

Im Zusammenhang mit der Vereinfachung (Kürzen) von rationalen – d.h. in Form von Quotienten dargestellten – (algebraischen) Termen spielt die sogenannte *Polynomdivision* polynomialer Terme als Verallgemeinerung der *Division mit Rest* in $\mathbb{Z}$ eine besondere Rolle. Dieses schriftliche Verfahren soll im Folgenden speziell für den Fall eines Quotienten mit einem Zähler- und einem Nennerpolynom – *rationale Funktion* genannt – vorgestellt werden.

Die Polynomdivision	
Gegeben:	Die *gebrochen rationale Funktion* $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ mit den beiden Polynomen $p(x)=a_m\cdot x^m+a_{m-1}\cdot x^{m-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0\ ,\ a_m\neq 0$ und $q(x)=b_n\cdot x^n+b_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+b_1\cdot x+b_0\ ,\ b_n\neq 0$. Dabei gelte für *grad* $p=m$ und *grad* $q=n$: $m\geq n$.