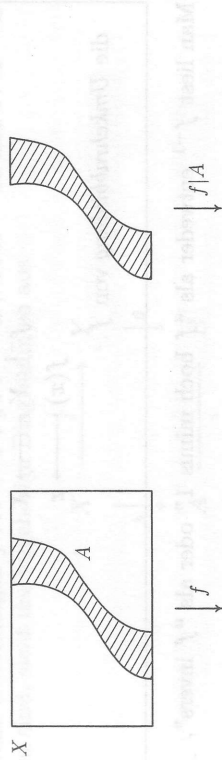


Kapitel 1: Mengen und Abbildungen

Sie haben eben gehört, dass nur die bijektiven Abbildungen eine Umkehrabbildung besitzen. Erfahrungsgemäß ist jedoch der Aberglaube schwer auszurotten, dass jede Abbildung  $f$  "irgendwie" doch eine Umkehrabbildung habe und dass das  $f^{-1}(B)$  mit dieser Umkehrabbildung etwas zu tun habe. Ich gebe zu, dass die Schreibweise dazu verleitet, aber es sollte doch möglich sein, den bijektiven und den nicht-bijektiven Fall auseinanderzuhalten? Wenn  $f$  tatsächlich bijektiv ist, dann hat  $f^{-1}(B)$  allerdings mit der Umkehrabbildung zu tun, denn Sie können es entweder als  $f$ -Urbild von  $B$  oder als  $f^{-1}$ -Bild von  $B$  auffassen, denn offenbar gilt ( $f$  bijektiv vorausgesetzt):

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} = \{f^{-1}(y) \mid y \in B\}.$$

Noch eine letzte Definition: die der Einschränkung einer Abbildung auf eine Teilmenge des Definitionsbereiches.



**Definition:** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $A \subset X$ . Dann heißt die Abbildung

$$f|A : A \longrightarrow Y$$

$$a \longmapsto f(a)$$

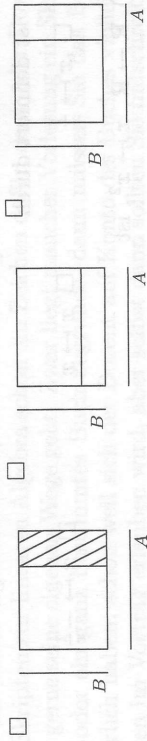
die *Einschränkung* von  $f$  auf  $A$ . Man liest  $f|A$  als "  $f$  eingeschränkt auf  $A$ ".

1.3 TEST

- (1) Wenn für jedes  $a \in A$  gilt:  $a \in B$ , dann schreibt man
- $A \subset B$
  - $A = B$
  - $A \cup B$

- (2) Welche der unten angegebenen Mengen ist für jede Wahl der Menge  $M$  leer?
- $M \cup M$
  - $M \cap M$
  - $M \setminus M$

- (3)  $A \times B$  werde wie üblich durch das Rechteck symbolisiert. Wie wäre dann  $\{a\} \times B$  einzuzichnen?



- (4) Welche der folgenden Aussagen ist falsch: Die Abbildung

$$\text{Id}_M : M \longrightarrow M$$

$$x \longmapsto x \text{ ist stets}$$

- surjektiv
- bijektiv
- konstant

- (5)  $A, B$  seien Mengen,  $A \times B$  das kartesische Produkt. Unter der Projektion auf den zweiten Faktor versteht man die Abbildung  $\pi_2$ :

$$A \times B \rightarrow B$$

$$(a, b) \mapsto b$$

- $A \times B \rightarrow A$
- $A \times B \rightarrow B$
- $B \rightarrow A \times B$
- $b \mapsto (a, b)$

- (6) Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Welche der folgenden Aussagen bedeutet, dass  $f$  surjektiv ist:

- $f^{-1}(Y) = X$
- $f(X) = Y$
- $f^{-1}(X) = Y$

- (7) Seien  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  Abbildungen. Dann ist die Abbildung  $gf : X \rightarrow Z$  definiert durch

- $x \mapsto g(f(x))$
- $x \mapsto f(g(x))$
- $x \mapsto g(x)(f)$



ein kommutatives Diagramm. Dann ist

- $h = gf$
- $f = hg$
- $g = fh$

(9) Die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

ist bijektiv. Die Umkehrabbildung

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ist definiert durch

$$\square x \mapsto \frac{1}{x} \quad \square x \mapsto x \quad \square x \mapsto -\frac{1}{x}$$

(10)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ , ist

- surjektiv, aber nicht injektiv
- injektiv, aber nicht surjektiv
- weder surjektiv noch injektiv

Tafelanschrift gar nicht richtig entziffern kann? Oder wenn der Dozent so schnell schreibt,<sup>1)</sup> dass ich gar nicht nachkomme? Und wenn ich einmal krank bin und die Vorlesung nicht besuchen kann? Dann sitze ich da mit meinen fragmentarischen Notizen.

So plausibel sich diese Argumente auch anhören, sie sind doch nicht stichhaltig. Erstens gibt es unter den fünf Metern Bücher in der Regel keines, in dem "der Vorlesungsstoff" steht, vielmehr ist die große Zahl von Lehrbüchern und Skripten zur linearen Algebra schon ein Zeichen dafür, dass jeder Dozent eben gerne seine eigenen Wege geht. Zwar liegt mancher Vorlesung ein Skriptum oder ein ganz bestimmtes Buch zugrunde, dann müssen Sie das Buch natürlich haben, schon weil sich der Dozent auf Konto des Buches vielleicht Lücken im Vortrag erlauben wird, aber selbst dann sollten Sie mitschreiben, und sobald er zwei Bücher zur Auswahl stellt, können Sie sicher sein, dass er keinem sehr genau folgen wird. Wenn Sie nicht schnell genug schreiben können, dann müssen Sie es eben trainieren, wenn Sie die Tafelanschrift von weit hinten nicht erkennen können, müssen Sie sich weiter vorn einen Platz suchen, und wenn Sie krank waren, müssen Sie die Mitschrift eines Kommilitonen kopieren.

Weshalb diese Anstrengung? Sie verlieren sonst den Kontakt zum Vortragenden, koppeln sich ab, verstehen bald nichts mehr. Fragen Sie irgend einen älteren Studenten, ob er jemals in einer Vorlesung etwas gelernt hat, in der er nicht mitgeschrieben hat. Es ist, als ob die Information durch Auge und Ohr erst einmal in die Hand gehen müsste, um im Gehirn richtig anzukommen. Vielleicht hängt das damit zusammen, dass Sie beim Ausüben von Mathematik ja auch wieder schreiben müssen. Aber was immer der Grund sei: Erfahrung sagt's.

Wenn Sie dann in Ihrer Vorlesung richtig Fuß gefasst haben, werden Ihnen auch Bücher sehr nützlich sein, und für das Studium in den höheren Semestern sind sie unentbehrlich, man muss deshalb lernen, mit Büchern zu arbeiten. Ein Studienanfänger aber sollte sich durch kein Buch verleiten lassen, den Kontakt zur Vorlesung leichtfertig aufzugeben.

1) "Der Jänich schreibt so schnell, so schnell kann ich nicht einmal *sprechen*" ist mir als Ausspruch einer Studentin überliefert worden.

Den Leser oder die Leserin des ersten Paragraphen eines Skriptums für das erste Semester stelle ich mir als einen Studienanfänger vor, und einen solchen wird es vielleicht interessieren, was ein Professor — in diesem Falle also ich — über das Verhältnis zwischen Büchern und Vorlesungen so denkt.

Als ich vor vielen Jahren das Skriptum für meine Studenten vorbereitete, aus dem nun dieses Buch geworden ist, nahmen die Lehrbücher und Skripten zur linearen Algebra in unserer Institutsbibliothek 1.20 m Regalplatz ein, heute sind es über fünf Meter. Je nach Temperament kann man das beruhigend oder beängstigend finden, aber eines hat sich seither nicht geändert: ein Studienanfänger in Mathematik braucht für den Anfang eigentlich gar kein Lehrbuch, die Vorlesungen sind autark, und die wichtigste Arbeitsgrundlage des Studenten ist seine *eigenhändige* Vorlesungsmitschrift.

Das klingt Ihnen vielleicht wie eine Stimme aus vorgutenbergischen Zeiten. Mitschreiben? Unter den fünf Metern wird sich ja wohl ein Buch finden, in dem der Vorlesungsstoff steht! Und wenn ich nicht mitschreiben brauche, kann ich viel besser mit*denken*, sagen Sie. Und außerdem sagen Sie zu sich selber: Mitschreiben? Und wenn ich nun von meinem Platz aus die