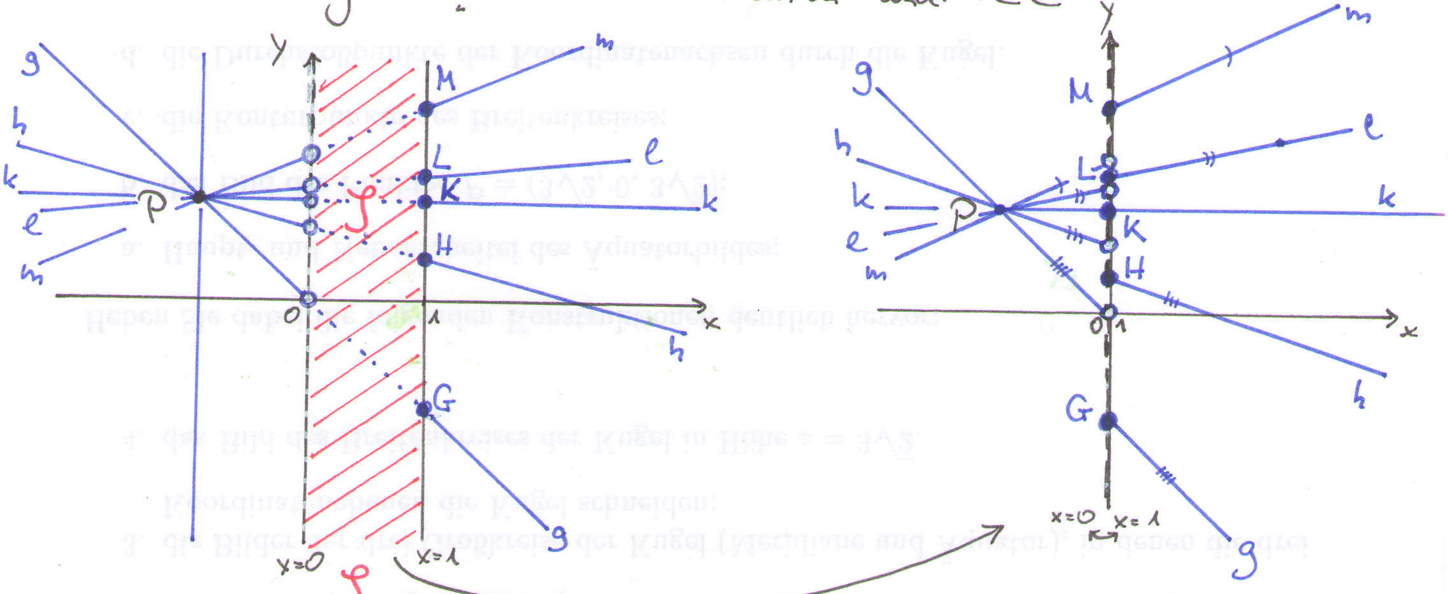
Die relative Unabhängigkeit des Halbebenenaxioms (VI) von den übrigen Axiomen (I) bis (V)

Wir betrachten dazu das sogenannte „Missing Strip“ *) – Geometriemodell $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ mit Ebene $\boxed{\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S} \text{ mit } \mathcal{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1\}}$. Alternativ kann man schreiben: $\boxed{\mathcal{E} = \mathbb{R} \setminus [0,1) \times \mathbb{R}}$. Die Geradenmenge $\mathcal{G}$ besteht aus den euklidischen Geraden g in $\mathbb{R}^2$ ohne den in $\mathcal{S}$ gelegenen Teil; also:

$$\boxed{\mathcal{G} = \{ g \subset \mathcal{E} \mid g: x = c \text{ mit } c \in \mathbb{R} \setminus [0,1) \text{ fest oder } g: y = mx + b \text{ mit } m, b \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R} \setminus [0,1) \}}$$

Wir erhalten also $\mathcal{E}$, indem wir den Streifen $\mathcal{S}$ herausschneiden und die beiden „Ufer“ von $\mathcal{S}$ wieder verkleben. Zur Erläuterung, was mit $\mathcal{G}$ passiert, skizzieren wir den Sachverhalt mittels eines „Geradenbüschels“ durch einen Punkt $P \in \mathcal{E}$:



$\mathcal{S} = [0,1) \times \mathbb{R}$ herausschneiden und $x=0$, $x=1$ miteinander verkleben!

Nun betrachten wir die bisher bekannten Axiome (I) bis (VI):

Von der euklidischen Ebene $\tilde{\mathcal{E}} = \mathbb{R}^2$ „erbt“ die Geometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ die Gültigkeit der ersten 3 Inzidenzaxiome Ax(I) bis Ax(III) !!

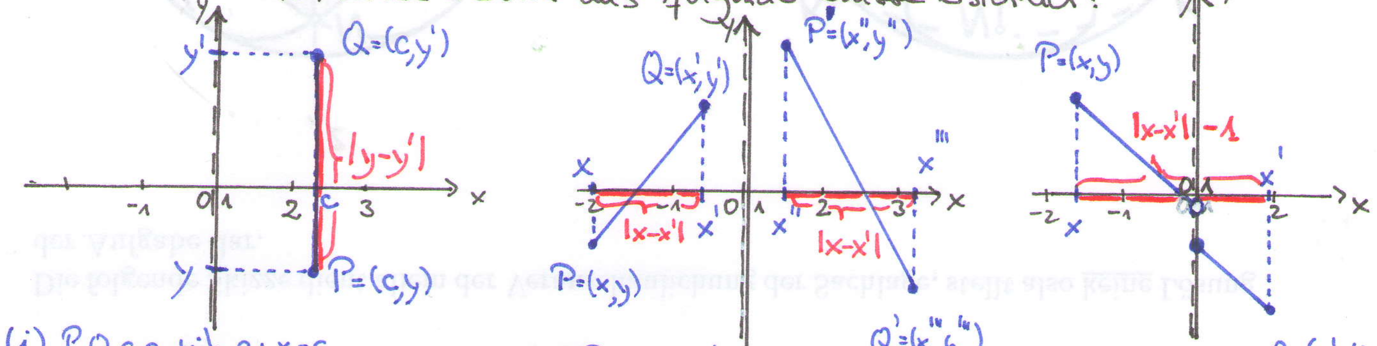
Außerdem folgt wegen im wesentlichen bestehender Übereinstimmung von $\mathcal{G}$ mit der euklidischen Geradenmenge $\mathcal{G}$ die Gültigkeit des Anordnungsaxioms Ax(IV).

Somit bleibt der Nachweis des Streckungsaxioms (V). Dazu führen wir als Abstandsfunktion $\boxed{d: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}_0^+}$ ein:

*) „Missing Strip“ = fehlender Streifen

$$d(P,Q) = \begin{cases} |y-y'| &, \text{wenn } P,Q \in g: x=c \;, c \in \mathbb{R}\setminus[0,1) \;, \\ |x-x'| &, \text{wenn } P,Q \in g: y=mx+b \text{ und } x\cdot x'>0 \text{ für } P=(x,y), Q=(x',y'), \\ |x-x'|-1 &, \text{wenn } P,Q \in g: y=mx+b \text{ und } x\cdot x'<0 \quad \text{— " —} \;. \end{cases}$$

Die 3 beschriebenen Fälle werden aus folgender Skizze ersichtlich:



(i) $P,Q \in g$ mit $g: x=c$.

(ii) $P,Q \in g$ mit $g: y=mx+b$ und $x\cdot x'>0$
D.h.: $P,Q \in g$ auf derselben Seite von $x=0$ bzw. $x=1$!

(iii) $P,Q \in g$ mit $g: y=mx+b$ und $x\cdot x'<0$
D.h.: $P,Q \in g$ auf getrennten Seiten von $x=0$ bzw. $x=1$.

Wir müssen nun die 3 geforderten Eigenschaften für die Abstandsfunktion $d: E\times E \to \mathbb{R}_0^+$ nachweisen:

(a) Symmetrie, d.h.: $\boxed{\bigwedge_{P\in E}\bigwedge_{Q\in E} d(P,Q)=d(Q,P)}$

Beweis: Ist $P=(x,y)$, $Q=(x',y')$, so erhält man für die 3 Fälle bezüglich „x" und „x'":

(i) $x=x'=c$: $d(P,Q)=|y-y'|=|y'-y|=d(Q,P)$ ✓

(ii) $x\neq x'$, $x\cdot x'>0$: $d(P,Q)=|x-x'|=|x'-x|=d(Q,P)$ ✓

(iii) $x\neq x'$, $x\cdot x'<0$: $d(P,Q)=|x-x'|-1=|x'-x|-1=d(Q,P)$ ✓

(b) Additivität d.h.: $\boxed{\bigwedge_{P,Q\in E}\bigwedge_{R\in \overline{PQ}} d(P,Q)=d(P,R)+d(R,Q)}$

Beweis: Sei $P=(x,y)$, $Q=(x',y')$, $R=(x'',y'')$. Dann erhält man für die 3 folgenden Fälle bezüglich „x", „x'" und „x''":

(i) $x=x'=x''=c$: Wegen $R\in\overline{PQ}$ folgt entweder $y\le y''\le y'$ oder $y\ge y''\ge y'$.
In beiden Fällen folgt: $|y-y''|+|y''-y'| = |(y-y'')+(y''-y')| = |y-y'|$
Also: $d(P,R)+d(R,Q) = |y-y''|+|y''-y'| = |(y-y'')+(y''-y')| = |y-y'|$
$= d(P,Q)$

(ii) $x\neq x'$ und $x\cdot x'>0$: Wegen $R\in\overline{PQ}$ liegen P,Q auf derselben Seite von $x=0$ bzw. $x=1$ und damit auch R auf derselben Seite wie P und Q.
D.h.: Entweder ist $x<0, x'<0, x''<0$ oder $x>0, x'>0, x''>0$.

Sei o.B.d.A. $x<0$, $x'<0$ und $x''<0$. Dann folgt:

$d(P,Q)=|x-x'|$, $d(P,R)=|x-x''|$, $d(R,Q)=|x''-x'|$ sowie wegen $R\in\overline{PQ}$:

$$d(P,R)+d(R,Q)=|x-x''|+|x''-x'|=|(x-\cancel{x''})+(\cancel{x''}-x')|=|x-x'|=$$
$$=d(P,Q).$$

Darin enthalten sind die beiden Unterfälle

α) $x\le x''\le x'<0$ und β) $x'\le x''\le x<0$!!

(iii) $x\neq x'$ und $x\cdot x'<0$: Damit liegen P und Q auf verschiedenen Seiten von $x=0$. Sei o.B.d.A. $x<0<x'$. Dann ergeben sich für $R\in\overline{PQ}$ zwei Möglichkeiten:

α) $x\le x''<0<x'$ oder β) $x<0<x''\le x'$.

Zu (α): $x\le x''<0<x' \Rightarrow d(P,Q)=|x-x'|-1=(x'-x)-1$,

$d(P,R)=|x-x''|=(x''-x)$, $d(R,Q)=|x''-x'|-1=(x'-x'')-1$

Es folgt:

$$d(P,R)+d(R,Q)=(\cancel{x''}-x)+(x'-\cancel{x''})-1=(x'-x)-1=d(P,Q)$$

Zu (β): $x<0<x''\le x' \Rightarrow d(P,Q)=|x-x'|-1=(x'-x)-1$,

$d(P,R)=|x-x''|-1=(x''-x)-1$, $d(R,Q)=|x''-x'|=(x'-x'')$

Es folgt:

$$d(P,R)+d(R,Q)=(\cancel{x''}-x)-1+(x'-\cancel{x''})=(x'-x)-1=d(P,Q)$$

Also gilt die Gleichung für die Additivität in beiden Fällen.

Aus (i), (ii) und (iii) zusammen ergibt sich (b).

(c) Eindeutige Abtragbarkeit, d.h.: $\boxed{\bigwedge_{\bar{P}Q\subset E}\ \bigwedge_{a\in\mathbb{R}_0^+}\ \dot{\bigvee}_{A\in\bar{P}Q}\ d(P,A)=a}$

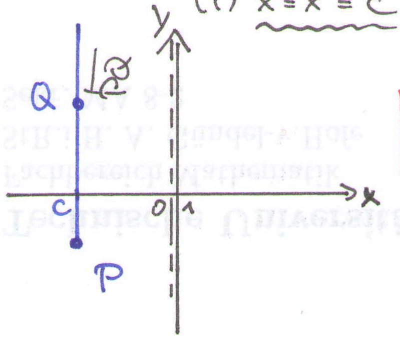
Beweis: Sei $P=(x,y)$, $Q=(x',y')$.

Dann ergeben sich für „x" und „x'" die Fälle (i) $x=x'=c$ und (ii) $x\neq x'$.

(i) $x=x'=c$: Dann folgt: $y<y'$ oder $y>y'$. Sei o.B.d.A. $\boxed{y<y'}$.

Es folgt:

$$\boxed{\bar{P}Q=\{X=(x'',y'')\mid x''=c,\ y''\ge y\}}$$



Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ vorgegeben, so existiert ein eindeutiger Punkt $A \in \overline{PQ}$ mit $d(P,A) = a$, nämlich $\boxed{A = (c, y+a)}$.

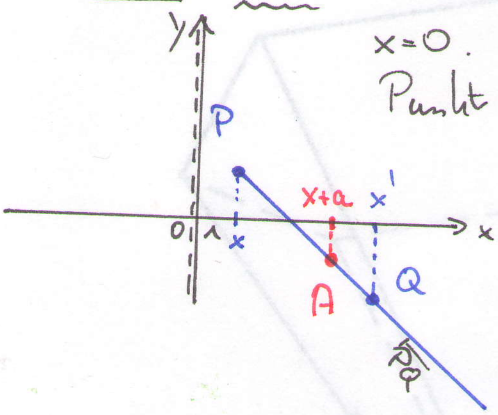
Für A gilt nämlich: $d(P,A) = |\cancel{y} - (\cancel{y}+a)| = |-a| = a$ ✓

(ii) $x \neq x'$: Dann folgt zunächst für „x": $0 < x$ oder $x < 0$. Sei nun o.B.d.A. $\boxed{0 < x}$, d.h.: $P = (x,y)$ liegt „rechts" von $x = 0$.

Für $Q = (x', y')$ erhält man dann folgende Fälle:

α) $x < x'$ oder β) $x > x'$.

<u>Zu α)</u>: $x < x'$: Dann liegt die ganze Halbgerade $\overline{PQ}$ „rechts" von $x = 0$. Damit existiert zu $a \geq 0$ als eindeutiger Punkt $A \in \overline{PQ}$ mit $d(P,A) = a$:



$\boxed{A = (x+a, \tilde{y})}$ mit $\frac{\tilde{y}-y}{a} = \frac{y'-y}{x'-x}$, d.h.:

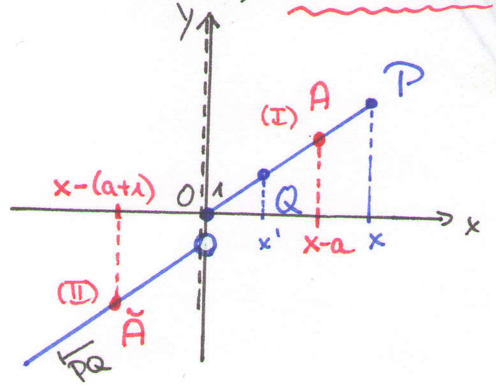
$$\boxed{\tilde{y} = y + a \cdot \frac{y'-y}{x'-x}}$$

Es folgt: $d(P,A) = |\cancel{x} - (\cancel{x}+a)| = |-a| = a$ ✓

<u>Zu β)</u>: $x > x'$: Dann „überschreitet" die Halbgerade $\overline{PQ}$ $x = 0$.

In diesem Fall unterscheide man bezüglich a:

(I) $0 \leq a \leq x-1$ und (II) $x-1 < a$.



(I) $0 \leq a \leq x-1$: Dann wähle $A \in \overline{PQ}$ mit $\boxed{A = (x-a, \tilde{y})}$ und

$$\frac{y-\tilde{y}}{a} = \frac{y-y'}{x-x'} \Leftrightarrow \boxed{\tilde{y} = y - a \cdot \frac{y'-y}{x'-x}}$$

Insbesondere ist

$x - a \geq x - (x-1) = 1$, d.h.:

A liegt „rechts" von $x = 0$!!

(II) $a > x-1$: Dann wähle $A \in \overline{PQ}$ mit $\boxed{A = (x-(a+1), \tilde{y})}$

und $\frac{y-\tilde{y}}{a+1} = \frac{y-y'}{x-x'} \Leftrightarrow \boxed{\tilde{y} = y-(a+1) \cdot \frac{y'-y}{x'-x}}$

Insbesondere ist $x-(a+1) = (x-1)-a < 0$, d.h.:

A liegt „links" von $x=0$!!

Wir erhalten nun im Fall (I): A und P liegen auf derselben Seite von $x=0$, also gilt:

$$d(P,A) = |\cancel{x} - (\cancel{x}-a)| = |a| = a \checkmark$$

Im Fall (II) folgt für das gewählte A:

A und P liegen auf verschiedenen Seiten von $x=0$; also gilt:

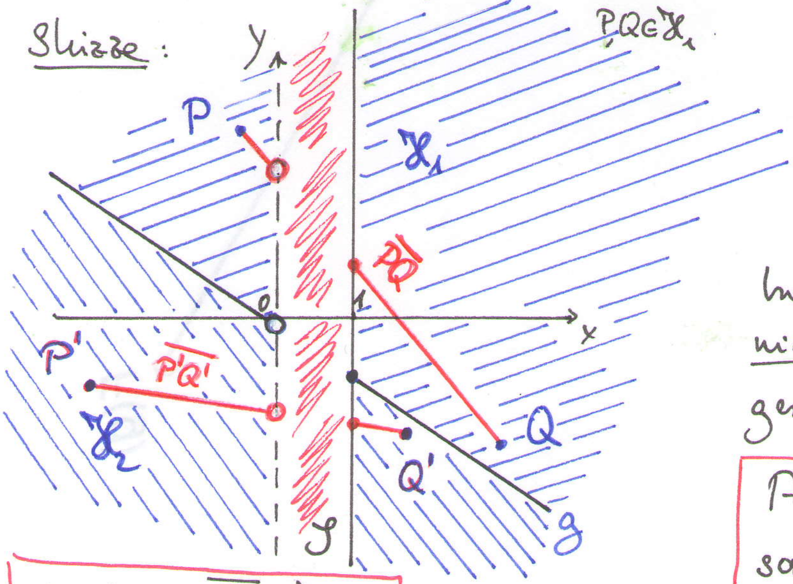
$$d(P,A) = |x - [x-(a+1)]| - 1 =$$
$$= |\cancel{x} - \cancel{x} + (a+1)| - 1 = (a+1) - 1 = a \checkmark$$

Dies mag zum Nachweis der eindeutigen Abtragbarkeit von $d(.,.)$ genügen!

Wir kommen nun zum Halbebenenaxiom (VI):

Jede Gerade $g \in \mathcal{G}$ zerlegt offensichtlich die Ebene $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}$ in zwei nicht-leere, disjunkte Halbebenen, wobei diese Halbebenen ihre Konvexität von $\mathbb{R}^2$ „erben". Es gilt also: $\bigwedge_{P,Q \in \mathcal{H}_1} \overline{PQ} \subset \mathcal{H}_1$, $\bigwedge_{P,Q \in \mathcal{H}_2} \overline{PQ} \subset \mathcal{H}_2$ für $\mathcal{E} \setminus g = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$.

Skizze:



$$\boxed{P,Q \in \mathcal{H}_1 \wedge \overline{PQ} \subset \mathcal{H}_1; \quad P',Q' \in \mathcal{H}_2 \wedge \overline{P'Q'} \subset \mathcal{H}_2}$$

Es gilt allerdings nicht immer:

$$\boxed{P \in \mathcal{H}_1 \wedge Q \in \mathcal{H}_2 \Rightarrow \overline{PQ} \cap g \neq \emptyset}$$

Insbesondere gilt in $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ auch nicht der Satz von Pasch, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

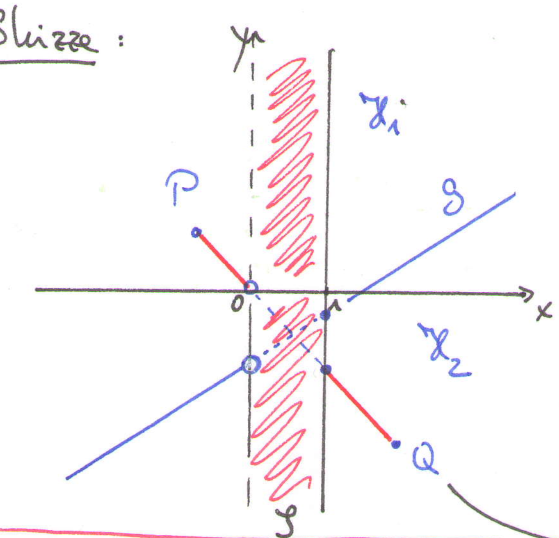
$$\boxed{A=(2,0),\ B=(2,3),\ C=(-2,0) \text{ sowie } g: y=2.}$$

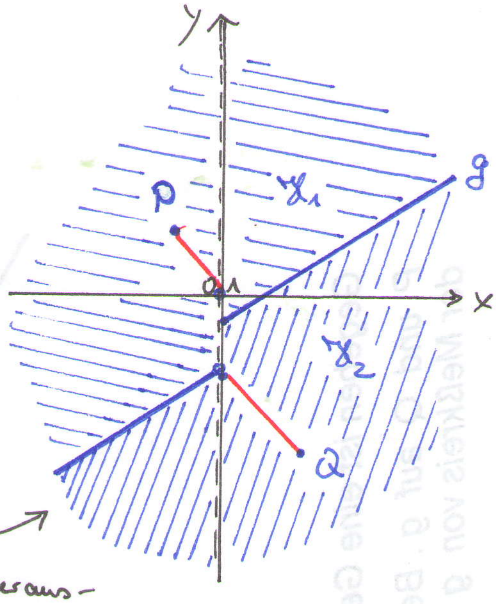
Es folgt: $g \cap \overline{AB} = \{D\}$ mit $D=(2,2)$.

Aber: $g \cap \overline{BC} = g \cap \overline{AC} = \emptyset$

Skizzen dazu s. nächste Seite!

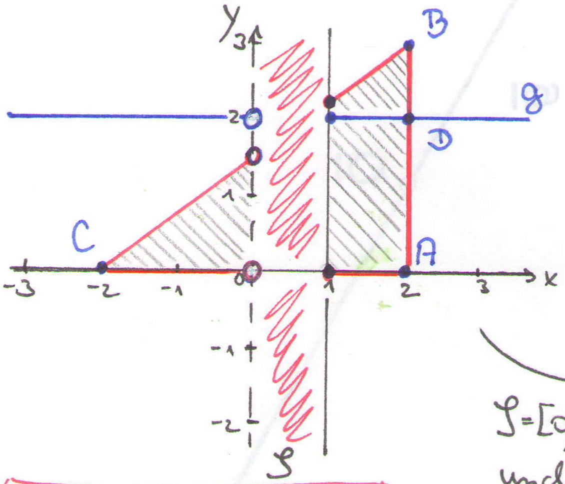
Skizze:

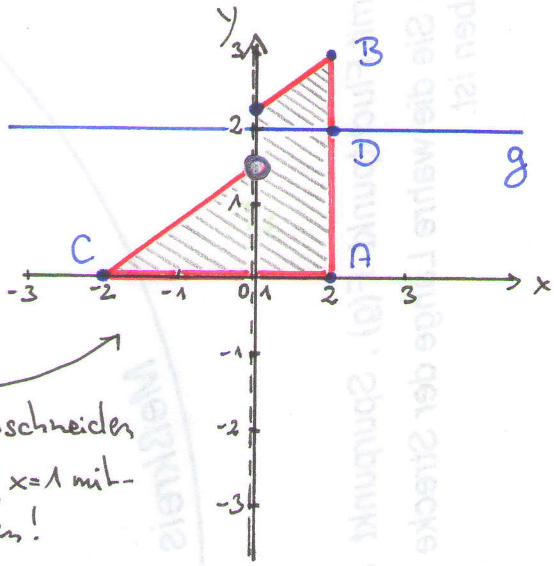




$P\in\mathcal{X}_1$, $Q\in\mathcal{X}_2$ und $\overline{PQ}\cap g=\emptyset$

$\mathcal{S}=[0,1)\times\mathbb{R}$ herausschneiden und „Ränder" $x=0$, $x=1$ miteinander verkleben!





$\mathcal{S}=[0,1)\times\mathbb{R}$ herausschneiden und Ränder $x=0$, $x=1$ miteinander verkleben!

$g\cap\overline{AB}=\{D\}$, aber:
$g\cap\overline{AC}=g\cap\overline{BC}=\emptyset$