Technische Universität Berlin
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

WS 2011/12
24.10.2011

StRiH. A. Gündel-vom Hofe

Ergänzungsskript zur „Linearen Algebra II (lehramtsbezogen)“

Die ***aussagenlogischen Verknüpfungen*** (Operatoren) samt zugehörigen ***Wahrheitstafeln***:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	*W*	*f*	*w*	*w*	*w*	*w*
w	*F*	*f*	*f*	*w*	*f*	*f*
f	*W*	*w*	*f*	*w*	*w*	*f*
f	*F*	*w*	*f*	*f*	*w*	*w*

Es folgen einige wichtige ***aussagenlogische Gesetze***, welche mittels der *logischen Äquivalenz* formuliert sind. Dabei steht

- *0* für eine beliebige *Kontradiktion* (d.h. eine Aussage, die *immer falsch* ist) sowie
- *1* für eine beliebige *Tautologie* (d.h. eine Aussage, die bei jeder Wahrheitswertebelegung *immer wahr* ist).

	Konjunktion „∧“	***Disjunktion „∨“***
Assoziativgesetze	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
Kommutativgesetze	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
Distributivgesetze	$A \wedge (B \vee C)$ $\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$ $\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Absorptionsgesetze	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
Idempotenzgesetze	$A \wedge A \Leftrightarrow A$	$A \vee A \Leftrightarrow A$
Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten	$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$	$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$
Gesetz der doppelten Negation	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	
De Morgans Gesetze	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
Gesetze für 0 und 1	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$ $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	$A \vee 0 \Leftrightarrow A$ $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$
	$\neg 1 \Leftrightarrow 0 \;,\; \neg 0 \Leftrightarrow 1$	
	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$	
Kontrapositionsgesetz	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	
Umschreibung der Äquivalenz	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	

Häufig werden die ***Schlussregeln*** in Form sogenannter ***Schlussfiguren*** geschrieben, wobei die einzelnen Prämissen untereinander zu stehen kommen und unterhalb einer horizontalen Trennlinie die Konklusion folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{array}\right\}\ \textit{Prämissen}$$
$$\overline{\beta \qquad \textit{Konklusion}}$$

Es folgen nun die am häufigsten verwendeten gültigen Schlussregeln in Form einer Tabelle:

modus barbara	modus ponens	modus tollens	Form 1	Form 2
$A \to B$ $\underline{B \to C}$	A $\underline{A \to B}$	$\neg B$ $\underline{A \to B}$	A $\underline{B\quad}$	$A \vee B$ $\underline{\neg A\quad}$
$\boldsymbol{A \to C}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\neg A}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$	$\boldsymbol{B}$

Form 3	Form 4	Form 5	Indirekter Beweis (Form 1)	Indirekter Beweis (Form 2)
$\underline{A \wedge B}$	$\underline{A\quad}$	$\underline{\neg A\quad}$	$\underline{\neg A \to A}$	A $\underline{(A \wedge \neg B) \to (C \wedge \neg C)}$
$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \vee B}$	$\boldsymbol{A \to B}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$

In der Prädikatenlogik gelten - wie auch in der Aussagenlogik - entsprechende ***prädikatenlogische Gesetze***, die im folgenden aufgelistet seien. Dabei bezeichnen $A(x)$ und $B(x)$ zwei beliebige einstellige *Prädikate* und $C(x,y)$ ein beliebiges *zweistelliges Prädikat*.

	Allquantor „∀“	***Existenzquantor „∃“***
Negationsregeln	$\neg\forall x : A(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$	$\neg\exists x : A(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$
Vertauschbarkeitssätze	$\forall x\ \forall y : C(x,y) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x : C(x,y)$	$\exists x\ \exists y : C(x,y) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x : C(x,y)$
Verträglichkeitsregeln	$(\forall x : A(x)) \wedge (\forall x : B(x)) \Leftrightarrow$ $\forall x : A(x) \wedge B(x)$	$(\exists x : A(x)) \vee (\exists x : B(x)) \Leftrightarrow$ $\exists x : A(x) \vee B(x)$
Implikationen ($\Rightarrow$) ($\forall$ *und* $\vee$ / $\exists$ *und* $\wedge$)	$(\forall x : A(x)) \vee (\forall x : B(x)) \Rightarrow$ $\forall x : A(x) \vee B(x)$	$\exists x : A(x) \wedge B(x) \Rightarrow$ $(\exists x : A(x)) \wedge (\exists x : B(x))$
Implikationen ($\Rightarrow$) ($\forall$ *und* $\to$)	$\forall x : A(x) \to B(x) \Rightarrow$ $(\forall x : A(x)) \to (\forall x : B(x))$	$\forall x : A(x) \to B(x)) \Rightarrow$ $(\exists x : A(x)) \to (\exists x : B(x))$
Vertauschbarkeit von „∀“ und „∃“	$\exists x\ \forall y : C(x, y) \Rightarrow \forall y\ \exists x : C(x, y)$	
„Spezialisierung“ bzgl. x_0	$\forall x : A(x) \Rightarrow A(x_0)$	$A(x_0) \Rightarrow \exists x : A(x)$