Satz 2.4:

Ist $\mathcal{H}$ Halbebene zu h' und $\mathcal{H}$ Halbebene zu h^*, so gilt: $h'=h^*$.

Beweis (indirekt):

Angenommen, $h' \neq h^*$. Dann folgt: $h' \cap h^* = \emptyset$ oder $h' \cap h^* = \{S\}$.

1. Fall: $h' \cap h^* = \{S\}$

Zunächst gilt: $\mathcal{E} = \mathcal{H} \cup h' \cup \mathcal{H}' = \mathcal{H} \cup h^* \cup \mathcal{H}^*$ und $\mathcal{H}'$ zweite Halbebene zu h', $\mathcal{H}^*$ zweite Halbebene zu h^*.

Wegen dem Halbebenenaxiom folgt also: $h' \cap \mathcal{H} = \emptyset$, $h^* \cap \mathcal{H} = \emptyset$

$\Rightarrow h' \subseteq h^* \cup \mathcal{H}^*$ und $h^* \subseteq h' \cup \mathcal{H}'$

Zu $S \in h'$ existieren nun (Streckungsaxiom) zwei Punkte $P, Q \in h'$ mit $S \in \overline{PQ} \setminus \{P, Q\}$.

Wegen $h' \cap h^* = \{S\}$ folgt weiterhin: $P, Q \notin h^*$

$\Rightarrow P, Q \in \mathcal{E} \setminus (\mathcal{H} \cup h^*) = \mathcal{H}^*$

Da $\mathcal{H}^*$ konvex ist folgt aus $P, Q \in \mathcal{H}^*$ auch: $\overline{PQ} \subseteq \mathcal{H}^*$, d.h. $S \in \overline{PQ} \subseteq \mathcal{H}^*$ ↯ ($S \in h^*$, d.h. $S \notin \mathcal{H}^*$!!)

Also haben wir einen Widerspruch bekommen, d.h.

$h' \cap h^* = \{S\}$ ist nicht möglich!

2. Fall: $h' \cap h^* = \emptyset$, d.h. $h' \parallel h^*$ mit $h' \neq h^*$.

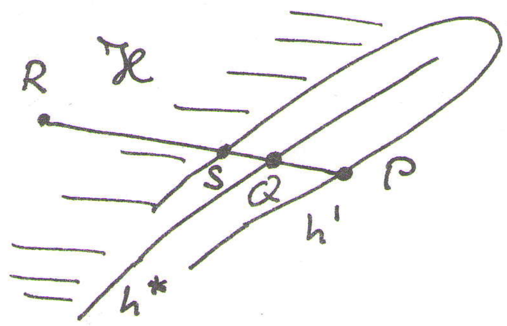
Es folgt mit $h' \subseteq h^* \cup \mathcal{H}^*$: $h' \subseteq \mathcal{H}^*$. Analog folgt mit $h^* \subseteq h' \cup \mathcal{H}'$: $h^* \subseteq \mathcal{H}'$. Wähle nun $R \in \mathcal{H}$ fest und $P \in h' \subseteq \mathcal{H}^*$.

Mit $R \in \mathcal{H}$, $P \in \mathcal{H}^*$ folgt nach dem Halbebenenaxiom:

$\overline{RP} \cap h^* = \{Q\}$ mit $Q \neq P$

Analog folgt:

$R \in \mathcal{H}$, $Q \in h^* \subseteq \mathcal{H}'$,



also wiederum nach dem Halbebenenaxiom, angewandt auf h':

$$\overline{QR} \cap h' = \{S\} \quad \text{mit} \quad S \neq Q \quad (\text{wegen } S \in h', Q \in h^* \text{ und } h' \cap h^* = \emptyset).$$

Es folgt nun insbesonder aufgrund der Lage: $S \neq P$.

Nach Inzidenzaxiom 2 gilt nun wegen $S, P \in h'$: $h' = SP$ und somit:

$$R \in SP = h' \ \lightning \ (R \in \mathcal{H} \text{ und } \mathcal{H} \cap h' = \emptyset \text{ !!})$$

Also haben wir auch in diesem Fall einen Widerspruch erhalten, d.h.

$h' \cap h^* = \emptyset$ ist <u>nicht</u> möglich!

Somit bleibt alleine übrig: $\boxed{h' = h^*}$