

ELEMENTARGEOMETRIE

Inhalt

- § 1 GERADEN, PUNKTE, ABSTAND
- § 2 HALBEBENE, WINKELFELD, WINKELMASS
- § 3 SPIEGELUNGEN UND STRECKUNGEN
- § 4 STRECKUNGSAXIOM UND PARALLELENAUSSAGE
- § 5 KONGRUENZABBILDUNGEN UND KONGRUENZSÄTZE
- § 6 ÄHNLICHKEIT
- § 7 KREISLEHRE
- § 8 ZERLEGUNGSGLEICHHEIT
- § 9 DER FLÄCHENINHALT
- § 10 RAUMFRAGEN

Stichwortverzeichnis

A

Abbildungsgruppen	6.4
absolute Geometrie	4.8
Abstandsfunktion	1.6
Abstand zweier Punkte	1.6
Achse einer Spiegelung	3.4
Achsen Spiegelung	3.4
achsensymmetrische Menge	3.6
ähnliche Punktmengen	6.5
ähnlich geordnete Mengen	1.12
Ähnlichkeitsabbildung	3.3
Ähnlichkeitssätze für Dreiecke	6.6
Ankreis eines Dreiecks	7.4
Anordnungsaxiom	1.4
Außenwinkelfeld eines Dreiecks	7.4
Axiom	1.1
Axiomensystem, unabhängiges	1.1
—————, vollständiges	1.1
—————, widerspruchsfreies	1.1

B

Bewegungen, Gruppe der	5.2
Brennpunkte	10.1

C

Ceva, Satz von	4.14
———, Umkehrung des Satzes von	4.15

D

Dandelin'sche Kugeln	10.1–3
Dehn, Max	10.7, 8
Desargues, kleiner Satz von	4.17
Doppelverhältnis	4.22
Drehmaß	5.15
Drehung	5.12
Drehzentrum	5.12
Dreieck	4.1
Dreispiegelungssatz	5.13

E

Ebene	1.1
Ecke eines Dreiecks	4.1
elementargeometrische Zerlegung	
in Dreiecksflächen	8.2
in Polygonflächen	8.5
Euklid, Höhensatz des	6.7
———, Kathetensatz des	6.7
Euklids Parallelenaussage	4.10
euklidische Geometrie	4.8
Eulersche Gerade	6.9

F

feinere Zerlegung	8.4
Feuerbachscher Kreis	7.12
Fixgerade	3.4
Fixpunktgerade	3.4
Fläche eines Dreiecks	8.1
Flächeninhalt einer Dreiecksfläche	9.6
————— einer Polygonfläche	9.1, 7
Flächeninhaltsfunktion	9.1

G

Gerade	1.1
geradentreue Abbildung	3.1
gestrecktes Winkelfeld	2.6
gleichschenkliges Dreieck	4.1
gleichseitiges Dreieck	4.1

H

Halbebene	2.2
—————, abgeschlossene	2.2
Halbebenenaxiom	2.2
halbebenenentreue Abbildung	3.2
Halbgerade	1.5
halbgeradentreue Abbildung	3.2
harmonische Lage	4.22, 23
Höhe	4.21
Höhenabschnitt	4.21
Höhenfußpunkt	7.12
Hyperbel	10.2

I, J

Inkreis eines Dreiecks	7.3
Innenwinkelfeld eines Dreiecks	4.1
innere Punkte einer Polygonfläche	8.3
————— eines Dreiecks	8.1
Inneres eines Dreiecks	8.1
Inzidenzgeometrie, ebene	1.3
—————, räumliche	1.15
Juelsche Pyramide	10.8

K

Kegelschnitte	10.1
kollineare Punkte	1.13
kongruente Punktmengen	5.5
Kongruenzabbildung	3.1
Kongruenzsätze für Dreiecke	5.7–11
konvexe Menge	2.1
Koordinatenfunktion	1.12
Kreis	7.1

L

längentreue Abbildung	3.1
Lot auf einer Geraden	3.5
Lotfußpunkt	3.5

M

Menelaos, Satz von	4.13
Metrik	1.6
metrischer Raum	1.6
Mittelpunkt einer Strecke	1.9
Mittelsenkrechte einer Strecke	3.7
Modelle einer Geometrie	1.2
Monotoniesatz für Winkelfelder	2.12

N

Nagelscher Punkt im Dreieck	7.8
Nebenwinkelfelder	2.12
nichteuklidische Geometrie	4.8
Nullwinkelfeld	2.6

O

orientierte Gerade	1.10
--------------------------	------

P

Pappus, kleiner Satz von	4.19
Parallelenkonstruktion	4.6
Parallelität von Geraden	1.4
Parallelogrammfläche	8.8
Pasch, Satz von	2.3
Peripheriewinkelfeld im Kreis	7.5
Permutationsgruppe	5.1
Poincaré-Modell der oberen Halbebene	3.12
Polygonfläche	8.1
projektive Abbildung	4.22
Prisma	10.5
Punkt	1.1
Punktspiegelung	3.10
Pyramide	10.5, 8
Pythagoras, Lehrsatz des	6.8

Q

Quadratfläche	8.8
---------------------	-----

R

Rand einer Halbebene	2.2
— eines Dreiecks	8.1
Randpunkt einer Polygonfläche	8.3
— eines Dreiecks	8.1
Rechteckfläche	8.8
Rechtwinkelfeld	2.14

S

Scheitel eines Winkelfeldes	2.6
Scheitelwinkelfeld	2.14
Schenkel eines Winkelfeldes	2.6
Schnittpunkte zweier Geraden	1.3
Sehnentangentensatz	7.10
Sehnentangentenwinkelfeld am Kreis ...	7.10
Sehnentangentenwinkelsatz	7.10
Seiten eines Dreiecks	4.1
Seitenhalbierende im Dreieck	4.16
Sekante eines Kreises	7.2
Senkrechte zu einer Geraden	2.14
Spiegelungsaxiom	3.4
Strahlensatz, erster	4.11
—, Umkehrung des 1.	4.12
—, zweiter	4.12
Strecke	1.4
Streckenmaßaxiom	1.5
streckentreue Abbildung	3.2
Streckfaktor	3.9
Streckung	3.9
Streckungsaxiom	4.8
Streckzentrum	3.9
Struktur der Ebene	3.1
strukturerhaltende Abbildung	3.1
Symmetrieachse einer Menge	3.6

T

Tangente am Kreis	7.2
Teilverhältnis	1.19
Thales, Satz von	7.5
Trägergerade	2.13
Translation	5.16
Transversale einer Polygonfläche	9.7
Transversalzerlegung	9.7
—, einfache	9.7
Trapezfläche	9.6

U

Umkreis eines Dreiecks	7.5
------------------------------	-----

V

Verbindungsgerade zweier Punkte	1.3
Verfeinerung einer Zerlegung	8.4
Verknüpfungsaxiome	1.1
vollständiges Viereck	4.23
Volumenfunktion	10.10

W

Winkelfeld	2.6
winkelfeldtreue Abbildung	3.2
Winkelmaß	2.11
Winkelmaßaxiom	2.10
Winkelmaßfunktion	2.11
winkelmaßtreue Abbildung	3.1
Winkelhalbierende	2.13

Z

Zentrumswinkelfeld im Kreis	7.5
Zentrumswinkel-Peripheriewinkel-Satz .	7.6
Zerlegung eines Winkelfeldes	2.9
zerlegungsgleiche Polyeder	10.6
<u> </u> Polygonflächen	8.6

EBENE EUKLIDISCHE GEOMETRIE

§1 Geraden, Punkte, Abstand

Gegebene Grundbegriffe der Geometrie sind

1. eine Menge $E \neq \emptyset$, EBENE genannt;
die Elemente von E , PUNKTE genannt.
2. eine Menge $G \neq \emptyset$ von Teilmengen von E ;
die Elemente von G , die GERADEN heißen.

Das "Aussehen" der Grundbegriffe wird nicht beschrieben;
man kann sie sich vorstellen wie man will.

Festgelegt werden nur die Beziehungen zwischen den Grundbegriffen, und zwar durch sogenannte AXIOME; das sind von vornherein als wahr anerkannte Aussagen, aus denen die Sätze der Geometrie durch logisches Schließen abgeleitet werden.

Das System der Axiome muß WIDERSPRUCHSFREI sein, d.h. es dürfen sich aus ihm nicht zwei einander widersprechende Sätze ableiten lassen. Das System sollte VOLLSTÄNDIG sein, d.h. man sollte aus ihm jeden wichtigen Satz der Geometrie ableiten können.

Das System kann im Idealfall UNABHÄNGIG sein, d.h. daß dann keines der Axiome aus den übrigen Axiomen des Systems herleitbar ist.

Wir wollen zunächst drei solche Axiome unserer Geometrie notieren.

AXIOM I (1. VERKNÜPFUNGSAXIOM):

Jeder Geraden gehören mindestens zwei (voneinander verschiedene) Punkte an.

AXIOM II (2. VERKNÜPFUNGSAXIOM):

Durch je zwei (voneinander verschiedene) Punkte von E geht genau eine Gerade von G .

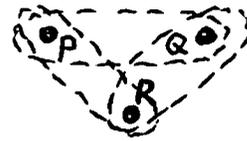
AXIOM III (3. VERKNÜPFUNGSAXIOM):

Es gibt drei nicht auf ein und derselben Geraden gelegene Punkte in E .

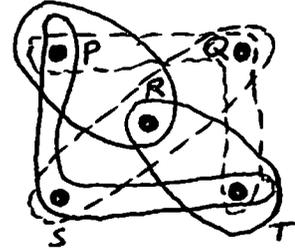
Modelle einer Geometrie sind Mengen von Objekten, die sich als Grundbegriffe interpretieren lassen und die den Axiomen genügen.

Nach dem, was wir bisher über unsere Geometrie gesagt haben, prüfe man, ob die nachfolgend angegebenen Systeme als Modelle geeignet sind.

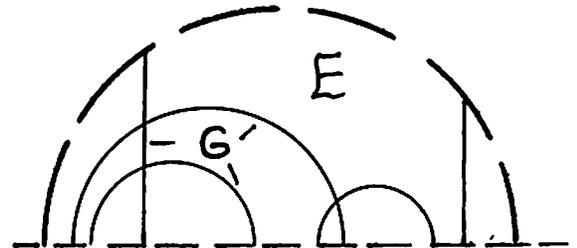
- (a) $\{P, Q, R\} = E$
 $\{\{P, Q\}, \{Q, R\}, \{R, P\}\} = G$



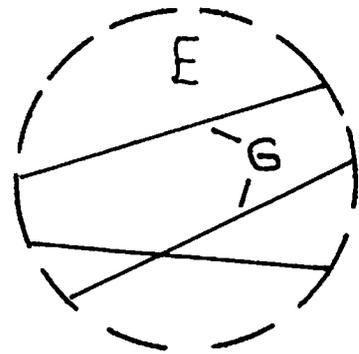
- (b) $\{P, Q, R, S, T\} = E$
 $\{\{P, Q, T\}, \{P, R\}, \{P, S, T\}, \{Q, R, S\}, \{R, T\}\} = G$



- (c) $E =$ Punktmenge des Innern eines Halbkreises
 $G =$ Menge aller auf dem Durchmesser des Halbkreises senkrecht stehenden Halbkreise und Halbsehnens in E .



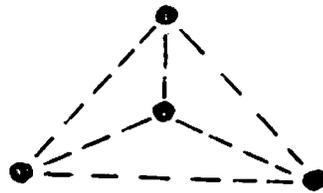
- (d) $E =$ Punktmenge eines Kreisinneren
 $G =$ Menge aller (offenen) Sehnen des Kreises



- (e) $E =$ "Randlose" Zeichenhalbebene
 $G =$ Menge aller Strahlen und Halbkreise in E , die auf dem "Rande" senkrecht stehen.



(f) System der (rechts) gezeichneten 4 Punkte (E) und der 6 Punktepaare - durch Strichelung hervorgehoben - (G).



Bemerkung: Eine Geometrie, die den Axiomen I - III genügt, heißt EBENE INZIDENZGEOMETRIE.

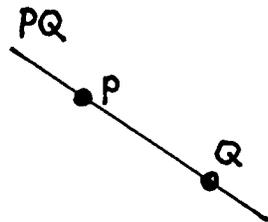
Satz 1.1:

Jede Gerade aus G ist eine echte Teilmenge von E.

Beweis: Aufgabe

Definition 1.1:

Die durch zwei voneinander verschiedene Punkte $P, Q \in E$ (nach AX.II) eindeutig bestimmte Gerade heißt VERBINDUNGSGERADE PQ.



Satz 1.2:

E enthält mindestens 3 voneinander verschiedene Geraden.

Beweis: Aufgabe

Satz 1.3:

Zwei voneinander verschiedene Geraden $g, h \in G$ besitzen höchstens einen gemeinsamen Punkt S:

$$\bigwedge_{g \in G} \bigwedge_{h \in G} g \neq h \rightarrow (g \cap h = \emptyset \vee \bigvee_{S \in E} g \cap h = \{S\})$$

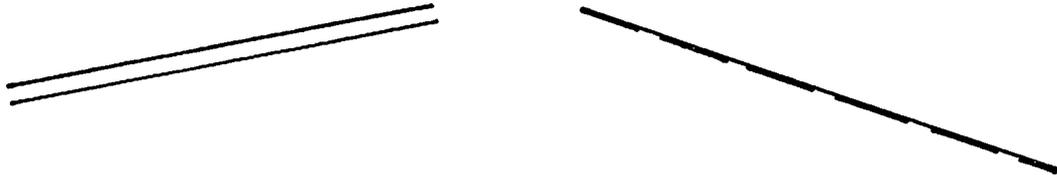
Beweis (indirekt): Aufgabe

Folgerung: Für zwei Geraden g, h gilt stets genau eine der drei Möglichkeiten

a) $g \cap h = \emptyset$ b) $g \cap h = \{S\}$ c) $g = h$

Def. 1.2: S heißt SCHNITTPUNKT der beiden Geraden g, h , wenn diese genau den Punkt S gemeinsam haben, d.h. wenn $g \cap h = \{S\}$ gilt.

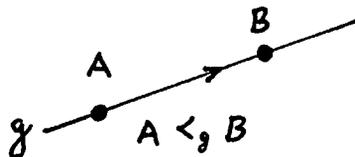
Def. 1.3: Die Gerade g heißt PARALLEL zur Geraden h (in Zeichen: $g \parallel h$), wenn $g \cap h = \emptyset$ oder $g = h$ gilt.



Satz 1.4: Die Relation \parallel ist auf G reflexiv und symmetrisch.

Beweis: Aufgabe

AXIOM IV (ANORDNUNGSAXIOM):



Auf jeder Geraden $g \in G$ existiert eine lineare, strenge Ordnungsrelation $<_g$. Das Zeichen $<_g$ wird "liegt vor" gesprochen.

Satz 1.5: Ist $g \in G$, so wird durch

$$\begin{array}{c} \wedge \\ A \in g \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge \\ B \in g \end{array} \quad A >_g B \leftrightarrow B <_g A$$

eine weitere lineare, strenge Ordnungsrelation auf g definiert.

Beweis: Aufgabe

Bemerkung: Wir setzen fest:

$$\begin{array}{c} \wedge \\ g \in G \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge \\ A \in g \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge \\ B \in g \end{array} \quad A \leq_g B \leftrightarrow A <_g B \vee A = B.$$

Auf diese Weise wird eine konvexe Ordnungsrelation auf g definiert. Wenn keine Mißverständnisse möglich sind, schreiben wir einfach $<$ bzw \leq für $<_g$ bzw. \leq_g .

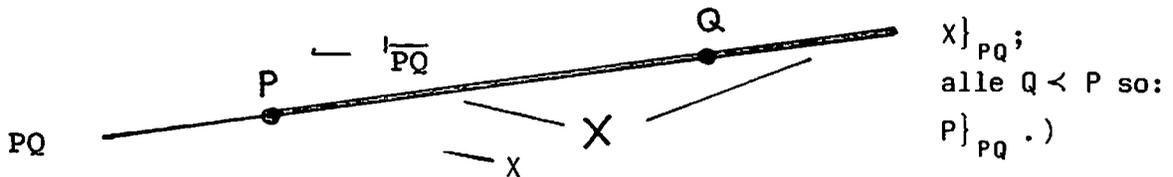
Def. 1.4: Unter der Strecke \overline{PQ} versteht man die Menge

$$\overline{PQ} := \{X \mid P \leq X \leq Q \vee Q \leq X \leq P\}_{PQ} .$$

Def. 1.5: Sind $P \neq Q$ Punkte in E , so versteht man unter der Halbgeraden (dem Strahl) mit dem Ausgangspunkt P die Punktmenge

$$\overline{PQ} := \{X \mid X \in \overline{PQ} \vee Q \in \overline{PX}\}_{PQ}$$

• Bemerkung: Im Falle $P < Q$ kann man \overline{PQ} auch so schreiben:



AXIOM V (STRECKENMABAXIOM):

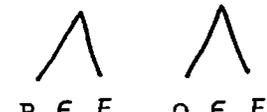
Es gibt eine Funktion

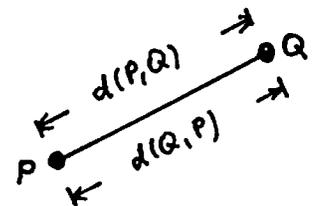
$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

mit folgenden Eigenschaften:

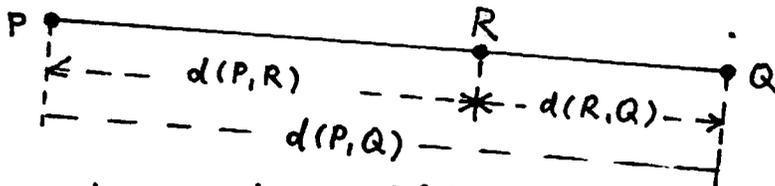
- (1) Symmetrie
- (2) Additivität
- (3) Eindeutige Abtragbarkeit

Dabei bedeutet

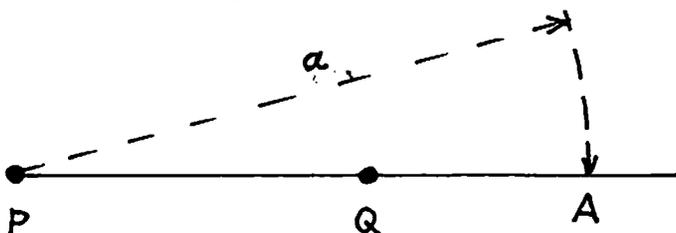
(1)  $d(P, Q) = d(Q, P)$



(2)  $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$



(3)  $d(P, A) = a$



BEMERKUNG:

(3) besagt, daß es auf jeder von P ausgehenden Halbgeraden in jeder Entfernung GENAU einen Punkt gibt (keine Lücken und Eindeutigkeit).

Welche der Modelle a) - f) auf den Seiten 1.2 und 1.3 sind damit hinfällig?

Bemerkung: Die Funktion d heißt auch METRIK, ABSTANDSFUNKTION, ENTFERNUNGSFUNKTION; entsprechend nennt man $d(P,Q)$ den Abstand oder die ENTFERNUNG der Punkte P und Q.

Die Abstandsfunktion rechtfertigt die Verwendung des Zentimetermaßes in der üblichen Zeichenebene.

Definition 1.6:

Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und

$$d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion mit den Eigenschaften

$$(I) \quad \begin{array}{c} \wedge \\ P \in M \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge \\ Q \in M \end{array} \quad d(P,Q) = 0 \iff P = Q$$

$$(II) \quad \begin{array}{c} \wedge \\ P \in M \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge \\ Q \in M \end{array} \quad d(P,Q) = d(Q,P)$$

$$(III) \quad \begin{array}{c} \wedge \\ P \in M \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge \\ Q \in M \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge \\ R \in M \end{array} \quad d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q).$$

Dann heißt d eine Metrik in M und das Paar (M,d) ein METRISCHER Raum.

Bemerkung: Die im Streckenmaßaxiom genannte Funktion hat die Eigenschaften (I) - (III) einer Metrik. (III) können wir aber erst beweisen, wenn wir unsere Geometrie weiter entwickelt haben.

Aufgabe 1.1:

- a) M sei eine Teilmenge des dreidimensionalen Anschauungsraumes, in der je zwei verschiedene Punkte den Abstand 1m haben. Wieviel Punkte kann M maximal enthalten, und wie liegen sie zueinander?
- b) Formulieren Sie das entsprechende mathematische Problem, nachdem Sie einen passenden metrischen Raum gewählt haben.

Aufgabe 1.2:

Zeigen Sie, daß (\mathbb{R}^3, d') ein metrischer Raum ist, wenn man für $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ die Entfernung durch

$$d(x, y) = \sum_{v=1}^3 |x_v - y_v| \text{ festsetzt.}$$

Aufgabe 1.3:

Gegeben sei die Menge \mathbb{R}^3 und die Funktion

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \bigwedge_{x \in \mathbb{R}^3} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}^3} d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases} .$$

Man zeige, daß (\mathbb{R}^3, d) ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 1.4:

Beweisen Sie, daß die drei Metrikaxiome voneinander unabhängig sind.

Satz 1.6:

Die im Streckenmaßaxiom eingeführte Funktion d erfüllt die erste Metrikeigenschaft (I)

$$\bigwedge_{P \in E} \bigwedge_{Q \in E} d(P, Q) = 0 \iff P = Q$$

Beweis:

- (a) Sei $P = Q$. Dann gilt wegen der Additivität von d mit $P = Q = R$

$$\begin{aligned} d(P, P) &= d(P, P) + d(P, P) \\ 0 &= d(P, P) \\ 0 &= d(P, Q) \end{aligned}$$

- (b) Sei $d(P, Q) = 0$.

Ist $Q = P$, so ist alles klar.
 Ist $Q \neq P$, so betrachten wir \overline{PQ} .

Nun ist stets $d(P, P) = 0$.

Da die Entfernung 0 von P aus nach dem Streckenabtrageaxiom genau einem Punkt auf \overline{PQ} zukommt, muß $Q = P$ sein: *Widerspruch!*

Satz 1.7:

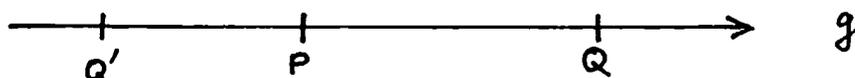
Zu jedem Punkt P einer Geraden g gibt es zwei und nur zwei von P ausgehende Halbgeraden g_1, g_2 auf g mit

$$g_1 \cup g_2 = g \quad \text{und} \quad g_1 \cap g_2 = \{P\} .$$

Beweis:

Zu $P \in g$ existiert ein Punkt $Q \in g$ (AX. I, S. 1.1) und es kann o.E.d.A. $P < Q$ angenommen werden.

Auf \overline{QP} tragen wir $2d(Q,P)$ ab und erhalten einen Punkt $Q' < P$:



Denn wäre

$$P \leq Q' < Q ,$$

so auch

$$d(P, Q') + d(Q', Q) = d(P, Q) ,$$

was $d(Q', Q) = 2d(P, Q)$ widerspricht.

Die gesuchten Halbgeraden sind nun

$$g_1 := \overline{PQ} \quad \text{und} \quad g_2 := \overline{PQ'} .$$

Für sie gilt

$$g_1 \cap g_2 = \overline{PQ} \cap \overline{PQ'} = \{X \mid P \leq X \wedge X \leq P\}_g = \{P\}$$

$$g_1 \cup g_2 = \overline{PQ} \cup \overline{PQ'} = \{X \mid P \leq X \vee X \leq P\}_g = g$$

Für jede weitere von P ausgehende Halbgerade \overline{PR} auf g gilt

a) im Falle $P <_g R$ wegen (vgl. Def. 1.5)

$$\begin{aligned} \overline{PR} &= \{X \mid X \in \overline{PR} \vee R \in \overline{PX}\}_g \\ &= \{X \mid P \leq X \leq R \vee P \leq R \leq X\}_g \\ &= \{X \mid P \leq X\}_g , \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } \overline{PR} = g_1 ;$$

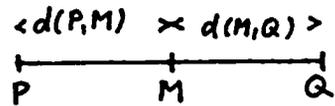
b) im Falle $R <_g P$

$$\overline{PR} = g_2 .$$

Definition 1.7:

Der Punkt $M \in \overline{PQ}$ heißt Mittelpunkt der Strecke \overline{PQ} , wenn

$$d(P,M) = d(M,Q)$$



gilt.

Satz 1.8:

Jede Strecke besitzt genau einen Mittelpunkt.

Beweis: Für $P = Q$ ist alles klar.

Sei \overline{PQ} die Strecke im Falle $P \neq Q$. Wir wählen auf der Geraden PQ den Strahl \overline{PQ} und tragen von P aus $\frac{1}{2}d(P,Q)$ ab: Wir erhalten einen Punkt M .

Wegen $d(P,M) < d(P,Q)$ kann nicht $P \leq Q < M$ sein, also gilt

$$P \leq M \leq Q.$$

Aus

$$d(P,Q) = d(P,M) + d(M,Q)$$

folgt mit $d(P,M) = \frac{1}{2}d(P,Q)$

$$\frac{1}{2}d(P,Q) = d(M,Q) .$$

Also ist M ein Mittelpunkt.

Da jeder weitere Mittelpunkt M' die Gleichung

$$d(P,Q) = d(P,M') + d(M',Q)$$

mit

$$d(P,M') = d(M',Q)$$

erfüllen muß, ergibt sich auch

$$d(P,M') = \frac{1}{2}d(P,Q)$$

und damit $M = M'$.

Definition 1.8:

g sei eine Gerade und $<$ eine lineare, strenge Ordnung auf g .
Dann heißt das Paar $(g, <)$ eine ORIENTIERTE GERADE.

Wir wollen auf g Koordinaten einführen, d.h. $(g, <)$ bijektiv und ordnungstreu auf die geordnete Menge der reellen Zahlen, $(\mathbb{R}, <)$, abbilden. Wie das geht, zeigen wir im nächsten Satz.

Satz 1.9:

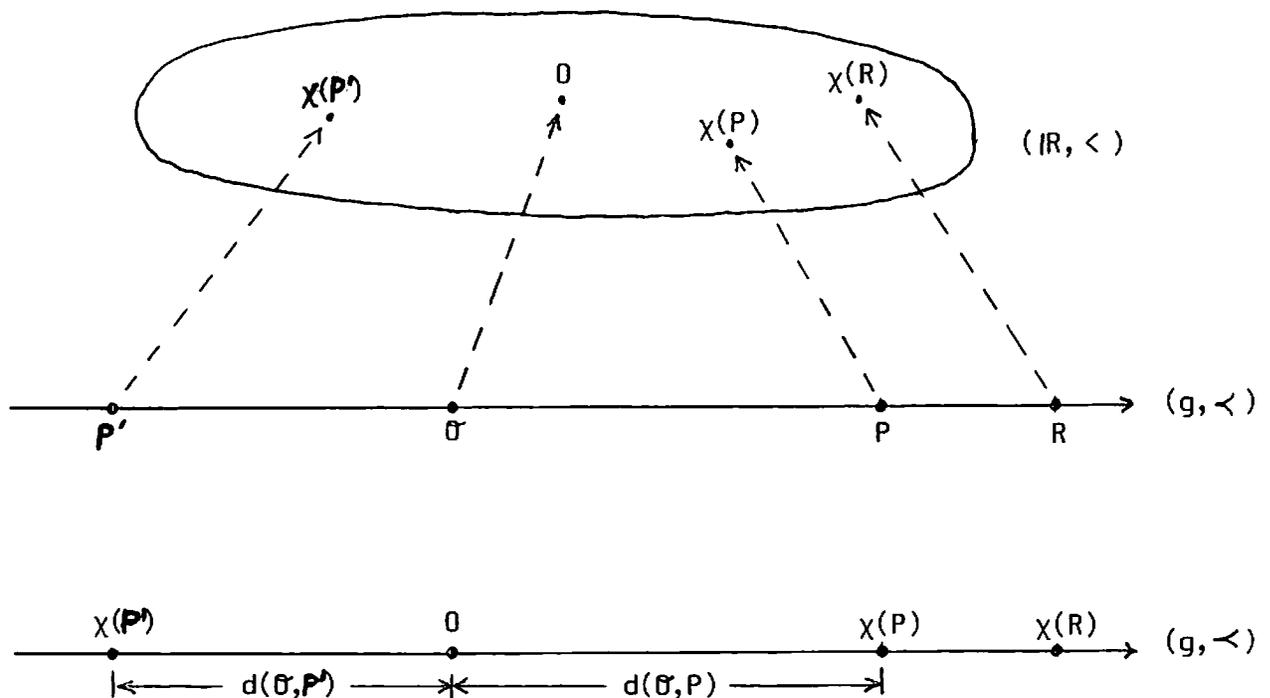
$(g, <)$ sei eine orientierte Gerade und \mathcal{O} ein beliebiger Punkt auf g .

Dann ist durch

$$\chi : g \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \chi(P) = \begin{cases} d(\mathcal{O}, P), & \text{falls } \mathcal{O} \leq P \\ -d(\mathcal{O}, P), & \text{falls } P < \mathcal{O} \end{cases}$$

eine BIJEKTIVE ABBILDUNG mit folgenden Eigenschaften bestimmt:

- (1) $\chi(\mathcal{O}) = 0$
- (2) $|\chi(P) - \chi(R)| = d(P, R)$
- (3) $\chi(P) < \chi(R) \iff P < R$



Beweis:

(0) χ ist injektiv, wenn

$$\bigwedge_{P \in g} \bigwedge_{R \in g} P \neq R \longrightarrow \chi(P) \neq \chi(R)$$

gilt.

Wir unterscheiden die drei *Hauptfälle*

(a) $P < R < \sigma$, (b) $P < \sigma < R$, (c) $\sigma < P < R$.

(a): Hier ist

$$d(P, \sigma) = d(P, R) + d(R, \sigma)$$

mit $d(P, R) > 0$.

Daraus folgt

$$\chi(P) = -d(P, \sigma) < -d(R, \sigma) = \chi(R) .$$

(b), (c): Aufgabe.

χ ist surjektiv, wenn

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigvee_{P \in g} \chi(P) = x$$

gilt.

Wir unterscheiden die zwei Fälle

(a) $x < 0$, (b) $0 \leq x$.

(a): Wir wählen auf g die durch σ bestimmte Halbgerade

$$g_1 := \{X \mid X \leq \sigma\}_g .$$

Auf dieser tragen wir $-x > 0$ ab und erhalten einen Punkt $P < \sigma$ mit

$$d(\sigma, P) = -x .$$

Dieser ist das gesuchte Urbild, denn es gilt

$$\chi(P) = -d(\sigma, P) = x .$$

(b): Aufgabe.

$$(1) \chi(\sigma) = d(\sigma, \sigma) = 0$$

(2) Wir unterscheiden die drei Fälle

(a) $P \leq R \leq \sigma$, (b) $P \leq \sigma \leq R$, (c) $\sigma \leq P \leq R$.

(a): Hier gilt:

$$\begin{aligned}d(P,R) + d(R,\emptyset) &= d(P,\emptyset) \\d(P,R) &= d(P,\emptyset) - d(R,\emptyset) \\&= -\chi(P) + \chi(R) \\&= |\chi(P) - \chi(R)| .\end{aligned}$$

(b), (c): Aufgabe

(3) Die Aussage $P < R \implies \chi(P) < \chi(R)$ wurde schon im Rahmen des Injektivitätsnachweises begründet.

Aus $\chi(P) < \chi(R)$ kann aber nicht $R \leq P$ folgen, weil das $\chi(R) \leq \chi(P)$ im Widerspruch zur Voraussetzung nach sich zöge. Demnach gilt auch die Umkehrung.

Satz 1.10:

Es sei χ die gemäß Satz 1.9 definierte Funktion.

Man zeige: Jede Abbildung

$$\chi^* : g \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften (1), (2), (3) gemäß Satz 9 ist mit χ identisch.

Beweis: Aufgabe.

Anl: Es ist nachzuweisen, daß χ^* in jedem Punkt von g denselben Wert wie χ hat.

Definition 1.9:

Die Funktion χ heißt KOORDINATENFUNKTION der orientierten Geraden $(g, <)$ bezüglich des Koordinatenursprungs $\emptyset \in g$. χ bildet $(g, <)$ und $(\mathbb{R}, <)$ ähnlich aufeinander ab.

Definition 1.10:

Sind $(M, <_M)$ und $(N, <_N)$ streng linear geordnete Mengen und ist $\chi : M \longrightarrow N$ eine Bijektion mit der Eigenschaft

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \wedge \\ m_1 \in M \end{array} & \begin{array}{c} \wedge \\ m_2 \in M \end{array} & m_1 <_M m_2 \implies \chi(m_1) <_N \chi(m_2) , \end{array}$$

so heißen M und N einander ähnlich geordnet.

Ähnliche Abbildungen spielen in der Ordnungstheorie die gleiche Rolle wie etwa isomorphe Abbildungen in der Gruppentheorie oder homöomorphe Abbildungen in der Topologie. Infolge der Ähnlichkeit kann man die Ordnungsstrukturen $(g, <)$ und $(\mathbb{R}, <)$ identifizieren, indem man jedem Punkt $P \in g$ die Zahl $\chi(P) \in \mathbb{R}$ - seine Koordinate - zuordnet. Das bedeutet, daß man die Elemente einer orientierten Geraden bei fest gewähltem Koordinatenursprung als Zahlen auffassen und damit die Gerade als Zahlengerade deuten und behandeln kann.

Folgende Eigenschaften einer Geraden g ergeben sich dann unmittelbar aus dem entsprechenden Eigenschaften von \mathbb{R} :

Satz 1.11:

- (1) Jede Gerade g besitzt unendlich viele Punkte.
- (2) g ist dicht geordnet, d.h. zu je zwei Punkten $P, Q \in g$ mit $P < Q$ existiert (mindestens) ein Punkt $Z \in g$ mit $P < Z < Q$,
- (3) g besitzt kein erstes und kein letztes Element, d.h. zu jedem $P \in g$ gibt es Elemente Q, R in g mit $Q < P$ und $P < R$.

Definition 1.11:

Drei oder mehr Punkte, die auf ein und derselben Geraden liegen, heißen KOLLINEAR.

Aufgabe 5: Man zeige, daß gilt:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \implies A = C.$$

Anleitung: Man setze o.B.d.A. $A < B$ voraus.

- a) Man begründe $A \leq C \wedge A \leq D$.
- b) Man begründe, daß $A < C$ unverträglich mit $C < D$ ist.
- c) Man begründe, daß $A < C$ unverträglich mit $D < C$ ist (weil dann \overline{CD} einen Punkt besitzt, der nicht auf \overline{AB} liegt. Wo liegt dieser, und wie findet man ihn? Hinweis: Streckenmaßaxiom!).
- d) Warum ist $A < C$ mit $D = C$ ausgeschlossen?

Aufgabe 6: Man beweise:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \implies A = C \text{ und } B = D \text{ oder} \\ A = D \text{ und } B = C .$$

Aufgabe 7: Man zeige, daß aus

$$\overline{PQ} \subset \overline{RS} \text{ stets } d(P,Q) \leq d(R,S) \text{ folgt.}$$

Anl.: Man setze o.E.d.A. $P \leq Q, R \leq S$ voraus.

Aufgabe 8: Man zeige:

$$\bigwedge_{\{P,Q,R\} \subset E} \{P,Q,R\} \subset g \implies P \in \overline{QR} \vee Q \in \overline{PR} \vee R \in \overline{PQ}$$

a) Zuerst folgere man aus

$$R \in \overline{PQ}, \text{ daß } \overline{RP} = \overline{RQ} \text{ gilt.}$$

b) Dann beachte man die Definition der Halbgeraden mit Hilfe von Strecken.

Aufgabe 9: Man beweise:

$$\bigwedge_{\{P,Q,R\} \subset E} \{P,Q,R\} \subset g \implies d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q) .$$

Anleitung: Man kann die Aussage der vorangehenden Aufgabe verwenden.

Aufgabe 10: Eine räumliche INZIDENZGEOMETRIE ist eine Menge $E \neq \emptyset$ (der Raum), deren Elemente Punkte heißen und von der gewisse Teilmengen Geraden bzw. Ebenen genannt werden und die folgenden Axiomen genügt:

Ax INZ 1: Jeder Geraden gehören mindestens zwei (voneinander verschiedene) Punkte an.

Ax INZ 2: Durch je zwei (voneinander verschiedene) Punkte von E geht genau eine Gerade.

Ax INZ 3: Zu jeder Ebene $E \subset E$ gehören mindestens drei nicht in ein und derselben Geraden gelegene Punkte.

Ax INZ 4: Durch je drei nicht kollineare Punkte von E geht genau eine Ebene.

Ax INZ 5: Wenn zwei Punkte einer Geraden g einer Ebene E angehören, dann ist g eine Teilmenge von E .

Ax INZ 6: Wenn ein Punkt zu zwei Ebenen gehört, so gibt es mindestens noch einen Punkt, der zu diesen beiden Ebenen gehört.

Ax INZ 7: Es gibt (mindestens) vier Punkte, die nicht in ein und derselben Ebene liegen.

Man beweise:

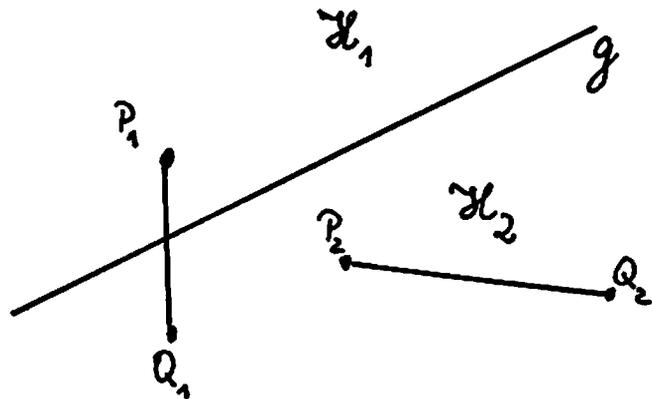
- (1) Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen gemeinsamen Punkt.
- (2) Zwei verschiedenen Ebenen ist entweder kein Punkt oder eine ganze Gerade gemeinsam.
- (3) Eine Ebene und eine nicht in ihr gelegene Gerade haben höchstens einen gemeinsamen Punkt.
- (4) Zu jeder Geraden g und jedem nicht auf g gelegenen Punkt P existiert genau eine Ebene, die P und alle Punkte von g enthält.
- (5) Es gibt genau eine Ebene, der alle Punkte von zwei sich schneidenden Geraden angehören.

§ 2 Halbebene, Winkelfeld, Winkelmaß

Die Zeichenebene wird durch jede ihrer Geraden derart in zwei Halbebenen zerlegt, daß eine Strecke, die einen Punkt der einen Halbebene mit einem Punkt der anderen Halbebene verbindet, diese Gerade schneidet.

Außerdem gehört die Verbindungsstrecke je zweier Punkte derselben Halbebene ganz dieser Halbebene an (s. Abb.).

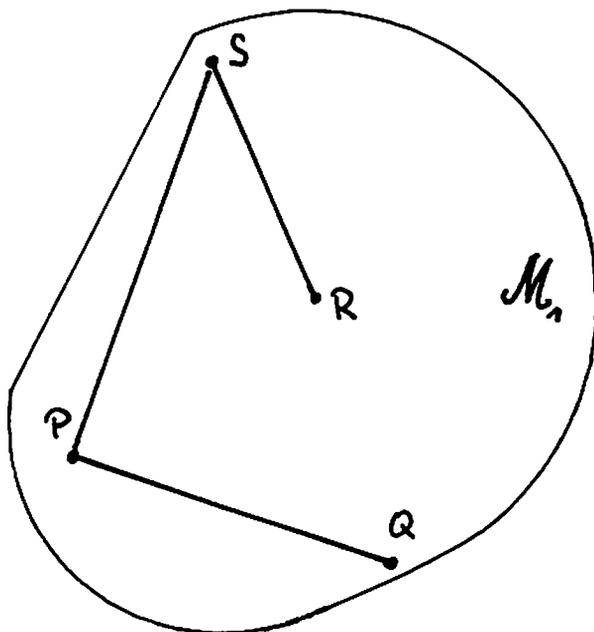
Zur axiomatischen Beschreibung dieses Sachverhalts benutzen wir den Begriff der Konvexität.



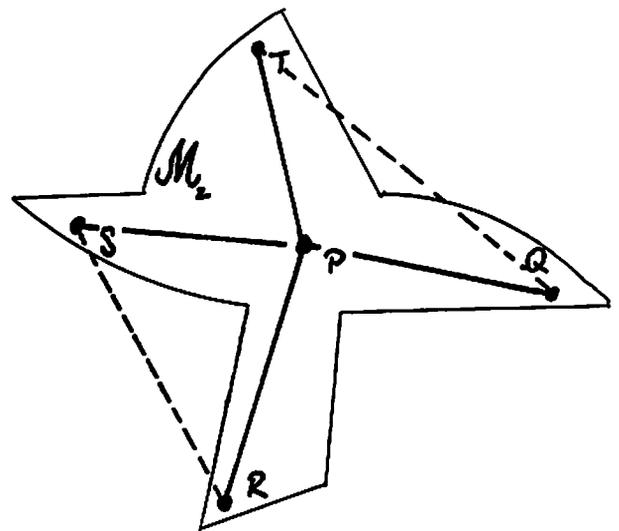
Definition 2.1:

Die Untermenge M von E heißt KONVEX, wenn mit je zwei Punkten $P, Q \in M$ die Strecke \overline{PQ} zu M gehört:

$$\begin{matrix} \bigwedge \\ P \in E \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bigwedge \\ Q \in E \end{matrix} \quad \{P, Q\} \subset M \rightarrow \overline{PQ} \subset M \Leftrightarrow M \text{ konvex.}$$



M_1 konvexe Menge



M_2 nicht-konvexe Menge

(hier: sternförmig bezgl. P)

Beispiele konvexer Mengen:

- a) Die Ebene E
- b) Jede Gerade $g \subset E$
- c) \emptyset
- d) Jede Halbgerade
- e) Jede Strecke
- f) Jede einpunktige Menge

Satz 2.1:

Die Vereinigung zweier verschiedener Geraden ist nicht konvex.

Beweis: Aufgabe

Anl.: Im Falle $g \neq h$ und $g \cap h = \{S\}$ begründe man,

- a) daß $P \in g$ und $Q \in h$ mit $P \neq S \neq Q$ existieren,
- b) daß $P \neq Q$ gilt,
- c) daß $Z \in \overline{PQ}$ mit $P \neq Z \neq Q$ existiert.

d) Man zeige: $\bigwedge_{z \in \overline{PQ}} P \neq Z \neq Q \rightarrow Z \notin g \cup h$

(Widerspruchsbeweis).

Satz 2.2:

Der Durchschnitt zweier konvexer Mengen ist konvex.

Beweis: Aufgabe

AXIOM VI (HALBEBENENAXIOM):

Zu jeder Geraden $g \subset E$ gibt es genau zwei nicht leere Untermengen $H_1, H_2 \subset E$ mit den Eigenschaften

- (1) H_1 und H_2 sind konvex,
- (2) $H_1 \cup H_2 = E \setminus g$ und $H_1 \cap H_2 = \emptyset$,

(3) $\bigwedge_{P \in H_1} \bigwedge_{Q \in H_2} \overline{PQ} \cap g \neq \emptyset$.

H_1, H_2 heißen (offene) HALBEBENEN zu g , g heißt RAND der Halbebenen, $H_1 \cup g$ bzw. $H_2 \cup g$ heißen ABGESCHLOSSENE HALBEBENEN zu g .

Satz 2.3:

Jede Parallele h' zu einer Geraden $h \neq h'$ liegt ganz in einer der beiden Halbebenen zu h .

Beweis:

Andernfalls wäre $h \cap h' \neq \emptyset$.

Satz 2.4:

Ist H Halbebene zu h' und H' Halbebene zu h^* , so gilt $h' = h^*$.

Beweis: Aufgabe

Anl.: Betrachte $E \setminus h' = H \cup H'$ und $E \setminus h^* = H' \cup H''$. Man benutze $h' \neq h^* \wedge h' \parallel h^* \Rightarrow h' \subset H \vee h' \subset H''$; entsprechend für h^* .

a) Man betrachte den Fall $h' \parallel h^*$ und schließe mittels Axiom VI (Halbebenenaxiom) auf $h^* = h'$.

b) Man betrachte den Fall $h' \cap h^* = \{S\}$, wähle $P, Q \in h'$ mit $S \in \overline{PQ}$ und folgere $P \in H$ und $Q \in H''$ (oder umgekehrt). Widerspruch dazu, daß H und h' keinen gemeinsamen Punkt haben.

Aufgabe 2.1: Es seien $H \cup h$ und $H' \cup h'$ abgeschlossene Halbebenen zu den Geraden h bzw. h' .

Man beweise: $H \cup h = H' \cup h' \Rightarrow H = H'$ und $h = h'$.

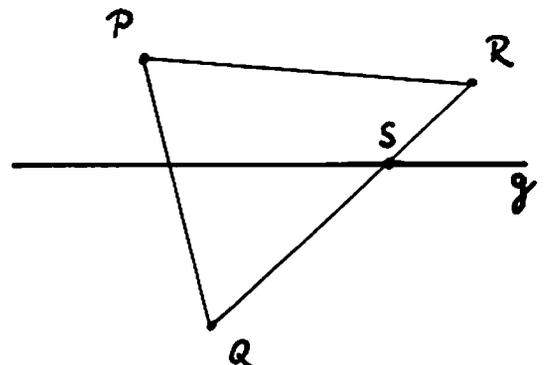
Anl.: Man verwende das Halbebenenaxiom und führe den Beweis mengentheoretisch.

Bem.: So wie jede Gerade durch jeden ihrer Punkte in zwei Halbgereaden aufgeteilt wird, teilt jede Gerade die Ebene in zwei Halbebenen auf.

Satz 2.5 (von Pasch):

P, Q, R sein drei nicht kollineare Punkte.

Schneidet eine Gerade g die Strecke \overline{QR} in S mit $S \notin \{Q, R\}$, so schneidet g auch eine der Strecken \overline{PQ} oder \overline{PR} .

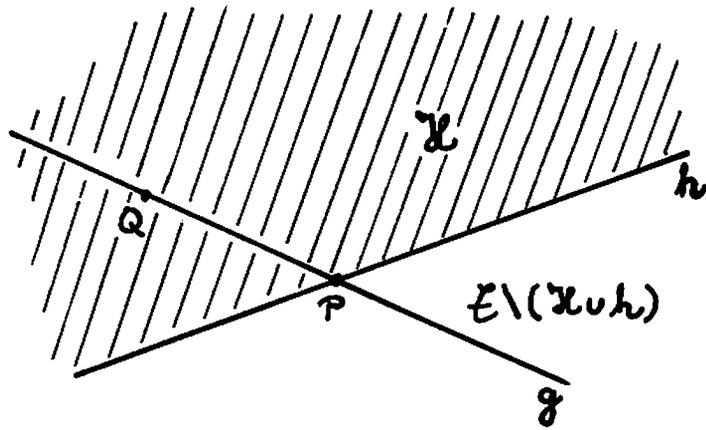


Beweis: Aufgabe

Anl.: Man betrachte die Halbebenen H_1 und H_2 zu g und wende auf \overline{QP} bzw. \overline{PR} das Halbebenenaxiom an.

Satz 2.6:

h sei Rand der Halbebene H ,
 g schneide h in P und enthalte $Q \in H$. Dann gilt
 $(H \cup h) \cap g = \overline{PQ}$



Beweis:

Wir unterscheiden die Fälle $P < Q$ und $Q < P$.

Sei $P < Q$:

Es gilt $\overline{PQ} \subset H \cup h$; wäre nämlich $X \in \overline{PQ}$ mit $X \notin H \cup h$, so wäre $X \in E \setminus (H \cup h)$, d.h. in der anderen Halbebene. Dann wäre $\overline{XQ} \cap h \neq \emptyset$ und zwar $\overline{XQ} \cap h = \{P\}$, da $g \cap h = \{P\}$. Aus $P \in \overline{XQ}$ folgt wegen $P < Q$

$$X < P < Q .$$

Aus $X \in \overline{PQ}$ folgt wegen $X \neq P$

$$P < X .$$

Daß ein Punkt von \overline{PQ} nicht zu $H \cup h$ gehört, führt demnach auf einen Widerspruch.

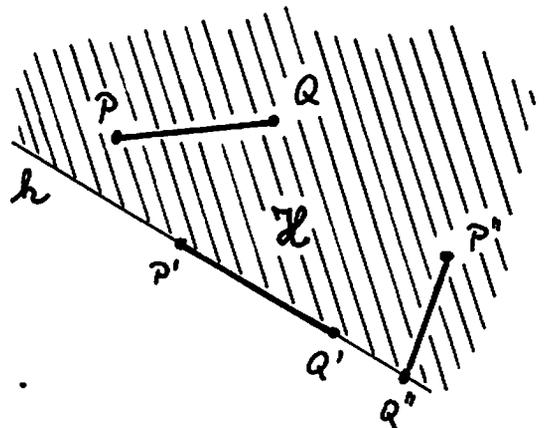
Umgekehrt kann kein nicht auf \overline{PQ} gelegener Punkt von g zu $H \cup h$ gehören, weil $g \setminus \overline{PQ} \subset E \setminus (H \cup h)$ gilt, d.h. daß die andere Halbgerade von g zu der anderen abgeschlossenen Halbebene zu h gehört.

Den Beweis führt man wie oben. Der Fall $Q < P$ ist analog zum Fall $P < Q$ zu behandeln.

Aufgabe 2.2:

Jede abgeschlossene Halbebene $H \cup h$ ist eine konvexe Menge. Man beweise diese Aussage.

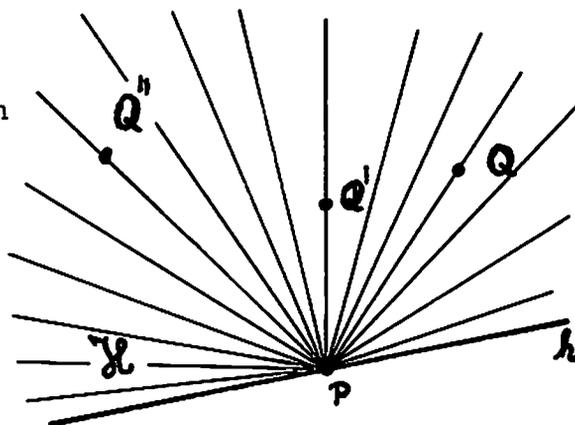
Anl.: Man unterscheide die drei Fälle
 $P, Q \in H$; $P, Q \in h$; $P \in H$ und $Q \in h$.



Satz 2.7:

Jede abgeschlossene Halbebene $H \cup h$ ist gleich der Vereinigung aller Halbgeraden, die von ein und demselben Punkt $P \in h$ ausgehen und einen weiteren Punkt Q von $H \cup h$ enthalten:

$$H \cup h = \bigcup_{Q \in H \cup h \setminus \{P\}} \overline{PQ} .$$



Beweis:

Ist g_1 eine Halbgerade von P aus, die $Q \in H$ enthält, so ist g_1 in $H \cup h$ enthalten (Satz 2.6).

Gilt $Q \in h$, so ist ebenfalls $g_1 \subset H \cup h$.

Demnach ist die Vereinigung aller genannten Halbgeraden in $H \cup h$ enthalten.

Umgekehrt liegt jeder Punkt $Q \in H \cup h$ mit $Q \neq P$ auf einer solchen Halbgeraden, nämlich auf \overline{PQ} .

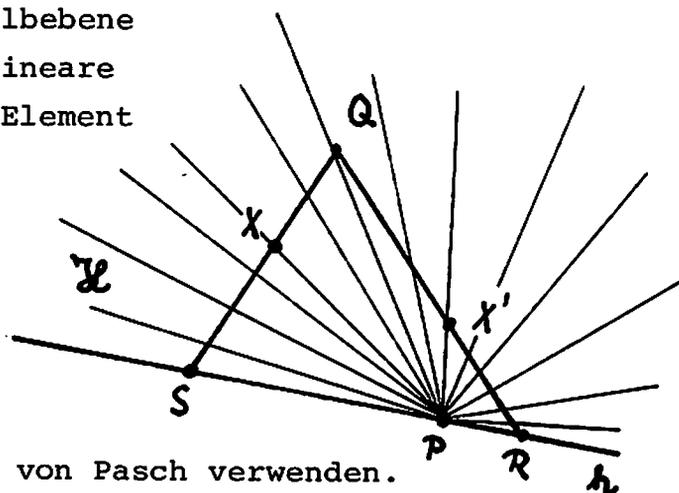
Damit sind beide Mengen gleich.

Satz 2.8:

Gegeben seien die abgeschlossene Halbebene $H \cup h$ und in dieser drei nicht kollineare Punkte Q, R, S mit $\{R, S\} \subset h$ und P Element der offenen Strecke \overline{RS} (Abb.).

Dann gilt

$$H \cup h = \bigcup_{x \in \overline{RQ} \cup \overline{QS}} \overline{Px} .$$



Beweishinweis: Es läßt sich der Satz von Pasch verwenden.

Beweis von Satz 2.8:

Mit $X \in \overline{RQ} \cup \overline{QS} \subset H \cup h$ ist $\overline{PX} \subset H \cup h$ für alle X , also auch die Vereinigung.

Sei nun $Y \in H \cup h$ gegeben. Dann trifft die Gerade PY nach dem Satz von Pasch $\overline{RQ} \cup \overline{QS}$ in einem Punkt X . Damit gehört Y zu \overline{PX} , und $H \cup h$ ist eine Teilmenge der Vereinigung.

Definition 2.2:

Den Durchschnitt zweier abgeschlossener Halbebenen, deren Ränder genau einen Punkt P gemeinsam haben, nennen wir ein (echtes) WINKELFELD W mit dem SCHWEITEL P :

$$W = (H' \cup h') \cap (H \cup h)$$

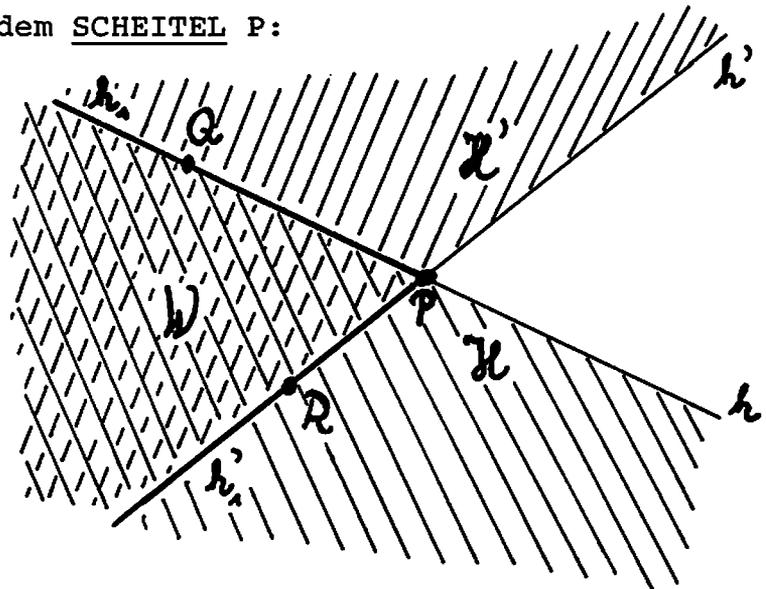
$$\{P\} = h' \cap h.$$

Die von P ausgehenden Halbgeraden

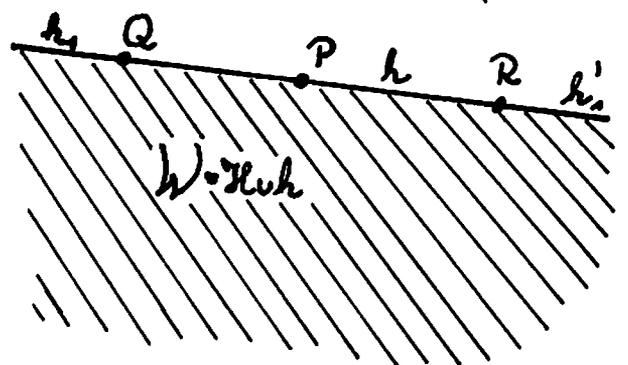
$$h'_1 = h' \cap (H \cup h) \text{ und}$$

$$h_1 := h \cap (H' \cup h')$$

heißen SCHENKEL des Winkelfeldes.



Eine abgeschlossene Halbebene mit ausgezeichnetem Randpunkt P heißt ein GESTRECKTES WINKELFELD; die Schenkel sind hier die beiden Halbgeraden, in die P den Rand zerlegt.



Fallen beide Schenkel zu einer Halbgeraden zusammen, so spricht man vom NULLWINKELFELD.

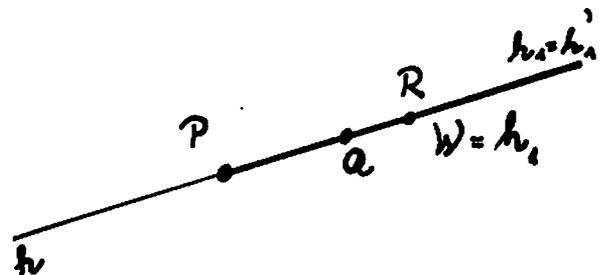
Man schreibt allgemein

$$W = \sphericalangle h_1 h'_1 = \sphericalangle h'_1 h_1$$

bzw.

$$W = \sphericalangle QPR = \sphericalangle RPQ,$$

wenn $h_1 = \overline{PQ}$, $h'_1 = \overline{PR}$ gilt.



Man spricht

"WINKELFELD $[h_1, h_1']$ " bzw. "WINKELFELD QPR ".

Aufgabe 2.3:

Es seien g, h Geraden mit $g \cap h = \{S\}$ und g_1, h_1 Halbgeraden von g bzw. h mit S als Ausgangspunkt.

- Zeigen Sie, daß es ein (echtes) Winkelfeld gibt, welches $g_1 \cup h_1$ als Rand besitzt.
- Zeigen Sie, daß das Winkelfeld mit dem Rand $g_1 \cup h_1$ eindeutig bestimmt ist (indirekter Beweis).

Satz 2.9:

Jedes Winkelfeld ist eine konvexe Menge.

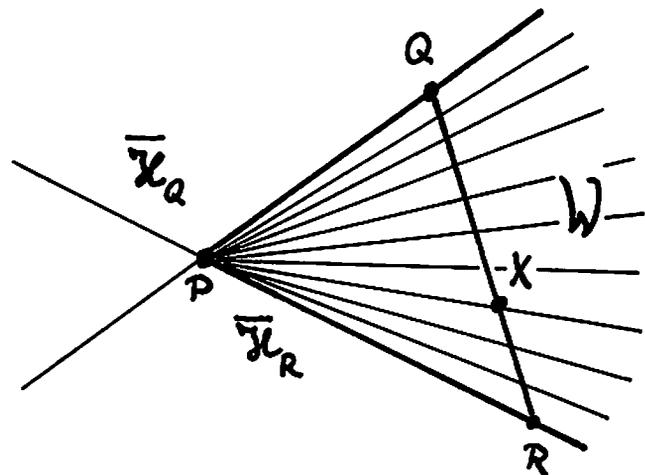
Beweis: Aufgabe.

Zur Einführung einer Winkelmaßfunktion, welche ähnlich der Abstandsfunktion die Eigenschaft der "Additivität" besitzen soll, benötigen wir einige vorbereitende Kenntnisse über das Zerlegen von Winkelfeldern durch Halbgeraden.

Satz 2.10:

$\omega = \angle QPR$ sei ein echtes *) Winkelfeld. Dann ist ω die Vereinigung aller vom Scheitel P ausgehenden Halbgeraden, die mit der Strecke \overline{QR} einen Punkt gemeinsam haben:

$$\omega = \bigcup_{X \in \overline{QR}} \overline{PX}.$$



*) d.h. weder gestrecktes Winkelfeld noch Nullwinkelfeld.

Beweis:

\overline{H}_Q sei die abgeschlossene Halbebene zu PR, in der Q liegt,

\overline{H}_R analog zu PQ ;

dann ist $W = \overline{H}_Q \cap \overline{H}_R$.

(a) \overline{H}_Q und \overline{H}_R sind konvex, also auch $W = \overline{H}_Q \cap \overline{H}_R$, demnach gilt

$$\overline{QR} \subset W .$$

Mit $X \in \overline{QR}$ ist $X \in W$, und damit gilt

$$\overline{PX} \subset \overline{H}_Q ; \overline{PX} \subset \overline{H}_R$$

nach Satz 2.7.

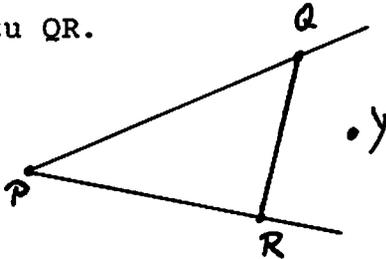
Also ist

$$\overline{PX} \subset W$$

und damit

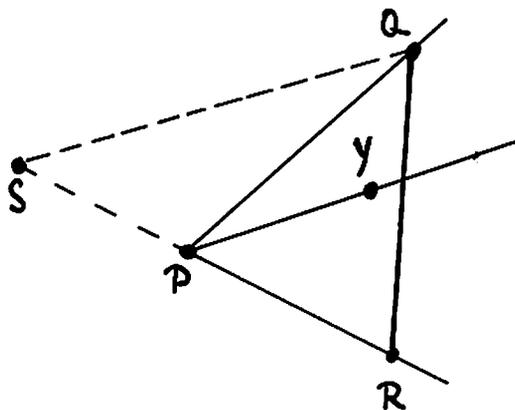
$$\bigcup_{X \in \overline{RQ}} \overline{PX} \subset W .$$

(b) 1. Fall: $Y \in W$ und P liegen in verschiedenen Halbebenen zu QR.



Dann schneidet \overline{PY} die Gerade QR, und zwar auf \overline{QR} , da \overline{PY} und \overline{QR} Teilmengen der konvexen Menge W sind.

2. Fall: $Y \in W$ liegt in derselben Halbebene zu \overline{QR} wie P.

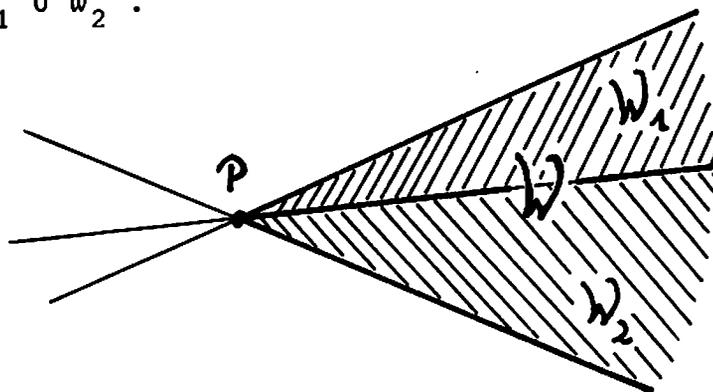


Dann muß der Strahl \overline{PY} nach dem Satz von Pasch eine der Strecken \overline{SQ} oder \overline{QR} treffen (s. Abb.), und das muß \overline{QR} sein, weil S und damit \overline{SQ} in der anderen abgeschlossenen Halbebene zu \overline{PQ} liegt wie Y und \overline{QR} (S und R liegen auf verschiedenen Halbgeraden von PR).

Definition 2.3:

Das Winkelfeld W heißt in die Winkelfelder W_1 und W_2 ZERLEGT, wenn gilt

- (1) $W_1 \cap W_2$ ist gemeinsamer Schenkel von W_1 und W_2 ,
- (2) $W = W_1 \cup W_2$.

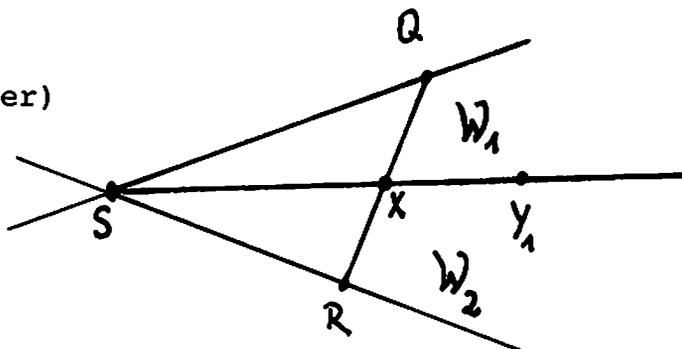


Satz 2.11:

Jedes Winkelfeld $W = \sphericalangle QSR$ wird durch jede in W gelegene Halbgerade $\overrightarrow{SY_1}$ zerlegt.

Beweis:

(für echte Winkelfelder)



Nach dem Beweisteil (b) des Satzes 2.10 schneidet $\overrightarrow{SY_1}$ die Strecke \overline{QR} in X :

$$\overrightarrow{SY_1} = \overrightarrow{SX} .$$

$\{\sphericalangle QSX, \sphericalangle XSR\}$ ist eine Zerlegung von W , denn es gilt

$$\begin{aligned} (1) \quad W_1 \cup W_2 &:= \sphericalangle QSX \cup \sphericalangle XSR \\ &= \bigcup_{y \in \overline{QX}} \overrightarrow{SY} \cup \bigcup_{y \in \overline{XR}} \overrightarrow{SY} \\ &= \bigcup_{y \in \overline{QR}} \overrightarrow{SY} \\ &= W . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \omega_1 \cap \omega_2 &= \bigcup_{Y \in \overline{QX}} \overline{SY} \cap \bigcup_{Y \in \overline{XR}} \overline{SY} \\
 &= \bigcup_{Y \in \overline{QX} \cap \overline{XR}} \overline{SY} \\
 &= \bigcup_{Y \in \{x\}} \overline{SY} = \overline{SX} = \overline{SY}_1 .
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Satz 2.8 läßt sich der Beweis für gestreckte Winkelfelder modifizieren.

AXIOM VII (WINKELMAßAXIOM):

Auf der Menge aller Winkelfelder in E ,

$$\Omega := \{\omega \mid \omega \text{ Winkelfeld}\}_{P(E)},$$

ist eine FUNKTION

$$\omega : \Omega \rightarrow [0, 180]$$

mit folgenden Eigenschaften erklärt:

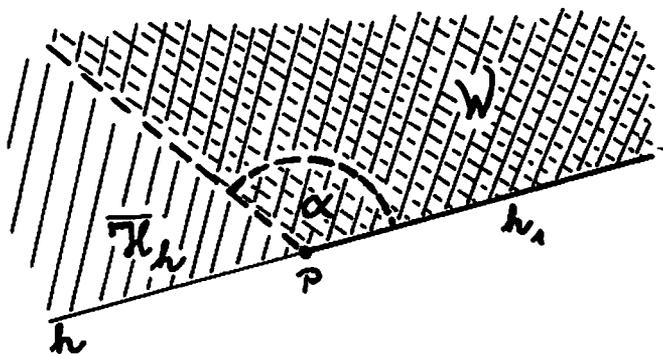
(1) ADDITIVITÄT,

d.h. ist $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$ eine Zerlegung, so gilt

$$\omega(\omega) = \omega(\omega_1) + \omega(\omega_2) .$$

(2) EINDEUTIGE ABTRAGBARKEIT DES WINKELFELDES,

d.h. zu jeder Halbgeraden h_1 auf der Trägergeraden h der abgeschlossenen Halbebene \overline{H}_h und zu jeder Zahl $\alpha \in [0, 180]$ gibt es genau ein Winkelfeld $\omega \subset \overline{H}_h$ mit dem Schenkel h_1 und $\omega(\omega) = \alpha$.



Die Funktion ω heißt

WINKELMAßFUNKTION,

die Zahl $\omega(W) \in [0, 180]$ heißt das WINKELMAß des Winkel-
feldes W .

Bemerkung: Anstelle des Bildintervalls $[0, 180]$ wird als
Winkelmaßintervall oft $[0, \pi]$ verwendet.

Die Wahl des Intervalls $[0, 180]$ trägt der Verwendung des
Winkelmessers im Schulunterricht Rechnung.

Satz 2.12:

Es gilt stets

$\omega(W) = 0 \iff W$ ist Nullwinkelfeld.

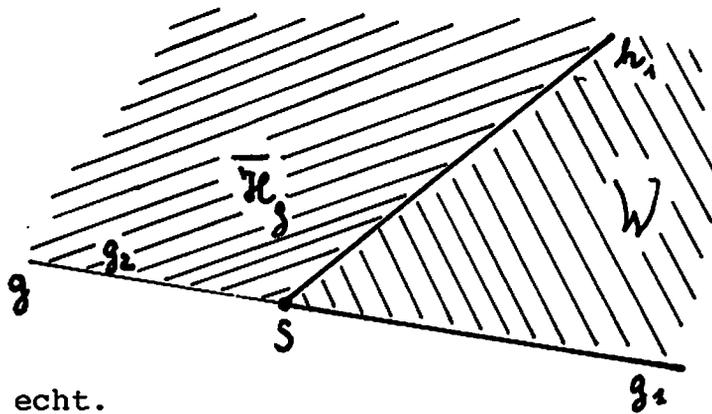
Beweis: Aufgabe

Anl.: Vgl. Satz 1.6 auf Seite 1.7.

Satz 2.13:

Ist W ein echtes Winkelfeld, so gilt $0 < \omega(W) < 180$.

Beweis:



Sei $\sphericalangle h_1 g_1$ echt.

g_2 sei die andere Halbgerade zu g_1 auf der Trägergeraden g .

\overline{H}_g sei die abgeschlossene Halbebene, in der h_1 liegt.

h_1 zerlegt \overline{H}_g in zwei Winkelfelder mit positiven Maßen
(nach Satz 2.12).

Aus

$$\omega(\overline{H}_g) = \underbrace{\omega(\sphericalangle g_1 h_1)}_{> 0} + \underbrace{\omega(\sphericalangle h_1 g_2)}_{> 0} \leq 180$$

folgt dann nach Ax. VII die Behauptung.

Definition 2.4:

ω_1 und ω_2 heißen NEBENWINKELFELDER, wenn sie eine Zerlegung eines gestreckten Winkelfeldes bilden.

Welches Winkelmaß haben die gestreckten Winkelfelder? Die Antwort liefert der folgende Satz:

Satz 2.14:

Alle und nur die gestreckten Winkelfelder haben das Winkelmaß 180.

Beweis:

Zu zeigen ist: Wenn \bar{H} ein gestrecktes Winkelfeld ist, so gilt $\omega(\bar{H}) = 180$.

Es sei h_1 ein Schenkel von \bar{H} . Für echte und Nullwinkelfelder ω mit Schenkel h_1 ist $\omega(\omega) < 180$.

Nach Axiom VII, (2) existiert auch zu $180 \in [0, 180]$ ein Winkelfeld ω^* in \bar{H} mit dem Schenkel h_1 ; das muß dann aber, da sein Maß nicht unter 180 liegt, gestreckt sein.

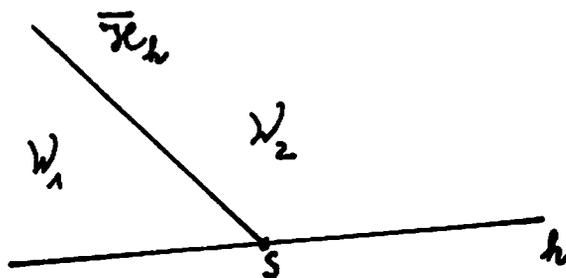
Der zweite Schenkel ist demnach die andere Halbgerade auf der Trägergeraden von h_1 .

Das bedeutet $\omega^* = \bar{H}$.

Folgerung 2.1:

Wegen der Additivität der Winkelmaßfunktion ist die Summe der Winkelmaße zweier Nebenwinkelfelder 180:

ω_1, ω_2 Nebenwinkelfelder $\Rightarrow \omega(\omega_1) + \omega(\omega_2) = 180$.



Satz 2.15 (MONOTONIESATZ):

S sei der Scheitel der Winkelfelder ω_1 und ω_2 . Dann gilt

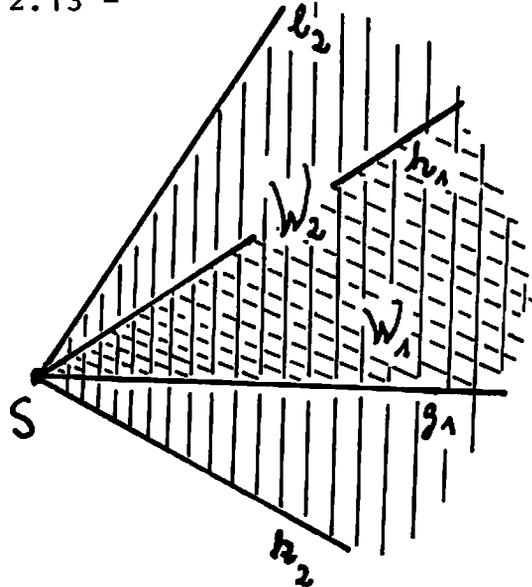
$$\omega_1 \subsetneq \omega_2 \Rightarrow \omega(\omega_1) < \omega(\omega_2).$$

Beweis:

Es sei $\omega_1 = \sphericalangle g_1 h_1$,

$\omega_2 = \sphericalangle k_2 l_2$

h_1 zerlege das Winkel-
feld ω_2 in $\sphericalangle k_2 h_1$ und
 $\sphericalangle h_1 l_2$; o.B.d.A. zer-
lege g_1 das Winkel-
feld ω_1 in $\sphericalangle k_2 g_1$ und
 $\sphericalangle g_1 h_1$.



Dann gilt wegen der Additivität von ω (Ax. VII, (1))

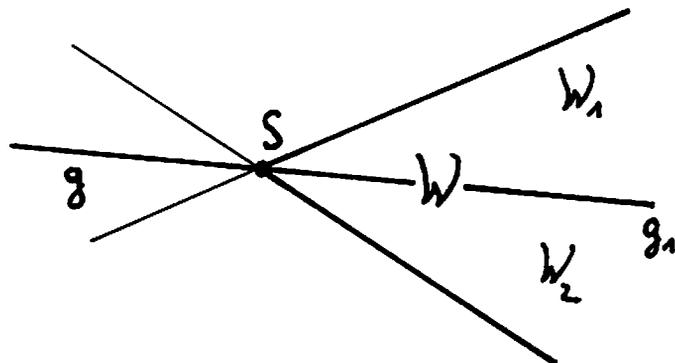
$$\begin{aligned} \omega(\omega_2) &= \omega(\sphericalangle k_2 h_1) + \omega(\sphericalangle h_1 l_2) \\ &= \omega(\sphericalangle k_2 g_1) + \underbrace{\omega(\sphericalangle g_1 h_1)}_{= \omega_1} + \omega(\sphericalangle h_1 l_2) \\ &> \omega(\omega_1), \end{aligned}$$

da $\sphericalangle k_2 g_1$ und $\sphericalangle h_1 l_2$ nicht beide zugleich Nullwinkel-
felder sein können (andernfalls wäre $\omega_1 = \omega_2$).

Definition 2.5:

ω sei ein Winkel-
feld mit dem Scheitel S . Die Halbgerade g_1
mit dem Randpunkt S zerlege ω in ω_1 und ω_2 .

Die TRÄGERGERADE g
von g_1 heißt
WINKELHALBIERENDE
von ω , wenn gilt
 $\omega(\omega_1) = \omega(\omega_2)$.



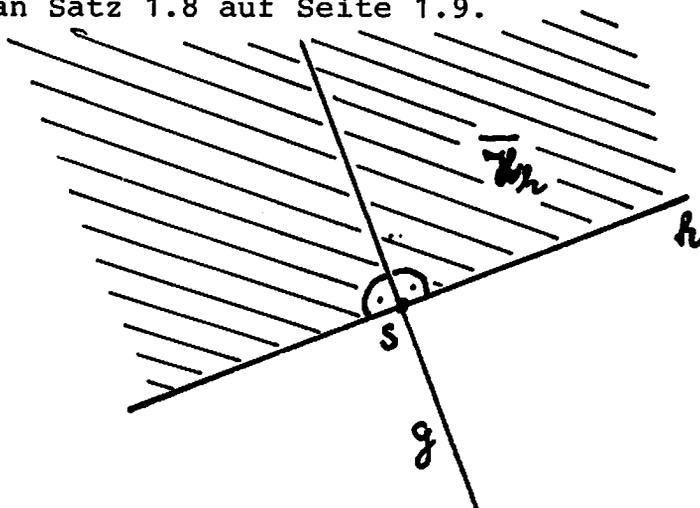
Aufgabe 2.4:

Man zeige, daß zu jedem Winkelfeld genau eine Winkelhalbierende existiert.

Anl.: Man orientiere sich an Satz 1.8 auf Seite 1.9.

Definition 2.6:

Die Winkelhalbierende g eines gestreckten Winkelfeldes \bar{H}_h heißt SENKRECHTE zum Rand h im Scheitel S . Die Winkelfelder, in die \bar{H}_h zerlegt wird, nennt man RECHTWINKELFELDER.



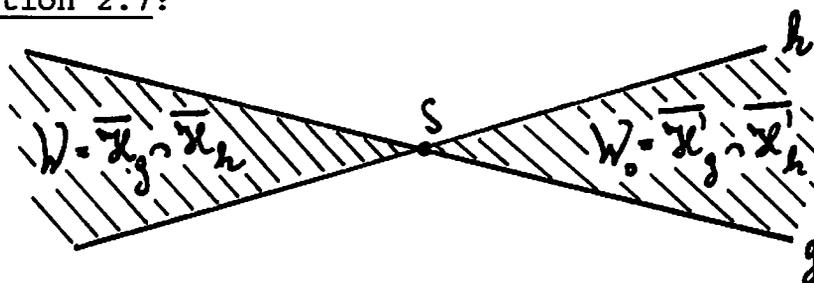
Bemerkung: Ist g Senkrechte zu h , so sagt man auch, g steht (in S) senkrecht auf h , und man schreibt $g \perp h$.

\perp stellt in der Menge der Geraden eine symmetrische Relation dar.

Aufgabe 2.5:

Man zeige, daß das Winkelmaß jedes Rechtwinkelfeldes 90 ist.

Definition 2.7:



Ist $W = \bar{H}_g \cap \bar{H}_h$ ein echtes Winkelfeld, so heißt das durch die beiden anderen abgeschlossenen Halbebenen zu g , h gebildete Winkelfeld W , das SCHEITELWINKELFELD zu W .

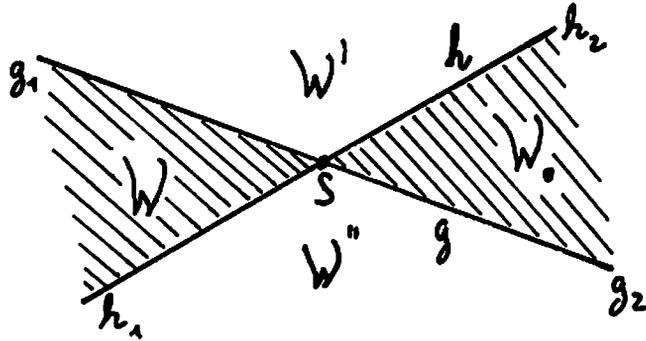
Aufgabe 2.6:

Ist g durch S in die Halbgeraden g_1, g_2 zerlegt, h durch S in die Halbgeraden h_1, h_2 , so sind $\sphericalangle g_1 h_1$ und $\sphericalangle g_2 h_2$ Scheitelwinkelfelder.

Satz 2.16:

Scheitelwinkelfelder besitzen dasselbe Winkelmaß.

Beweis: Aufgabe.



Aufgabe 2.7:

W und W_0 seien Scheitelwinkelfelder. Man zeige, daß die Winkelhalbierende von W auch Winkelhalbierende von W_0 ist. Verallgemeinern Sie diese Aussage für beliebige Geraden, die W vom Scheitel aus zerlegen.

Satz 2.4 :

Ist \mathcal{X} Halbebene zu h' und \mathcal{X}' Halbebene zu h^* , so gilt: $h' = h^*$.

Beweis (indirekt) :

Angenommen, $h' \neq h^*$. Dann folgt: $h' \cap h^* = \emptyset$ oder $h' \cap h^* = \{S\}$.

1. Fall : $h' \cap h^* = \{S\}$

Zunächst gilt: $E = \mathcal{X} \cup h' \cup \mathcal{X}' = \mathcal{X} \cup h^* \cup \mathcal{X}'$ und \mathcal{X}' zweite Halbebene zu h' , \mathcal{X}^* zweite Halbebene zu h^* .

Wegen dem Halbebenenaxiom folgt also: $h' \cap \mathcal{X} = \emptyset$, $h^* \cap \mathcal{X}' = \emptyset$
 $\Rightarrow h' \subseteq h^* \cup \mathcal{X}^*$ und $h^* \subseteq h' \cup \mathcal{X}'$

Zu $S \in h'$ existieren nun (Streckungsaxiom) zwei Punkte $P, Q \in h'$ mit $S \in \overline{PQ} \setminus \{P, Q\}$.

Wegen $h' \cap h^* = \{S\}$ folgt weiterhin: $P, Q \notin h^*$

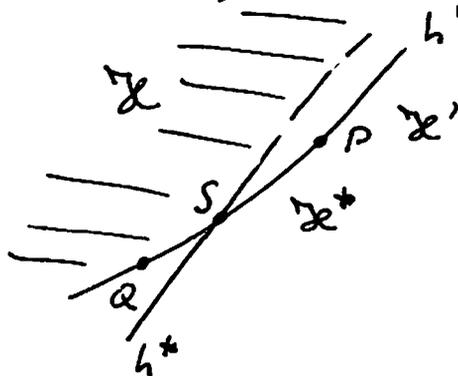
$\Rightarrow P, Q \in E \setminus (\mathcal{X} \cup h^*) = \mathcal{X}^*$

Da \mathcal{X}^* konvex ist folgt

aus $P, Q \in \mathcal{X}^*$ auch: $\overline{PQ} \subseteq \mathcal{X}^*$, d.h. $S \in \overline{PQ} \subseteq \mathcal{X}^* \not\subseteq (S \in h^*, \text{ d.h. } S \notin \mathcal{X}^* !!)$

Also haben wir einen Widerspruch bekommen, d.h.

$h' \cap h^* = \{S\}$ ist nicht möglich!



2. Fall : $h' \cap h^* = \emptyset$, d.h. $h' \parallel h^*$ mit $h' \neq h^*$.

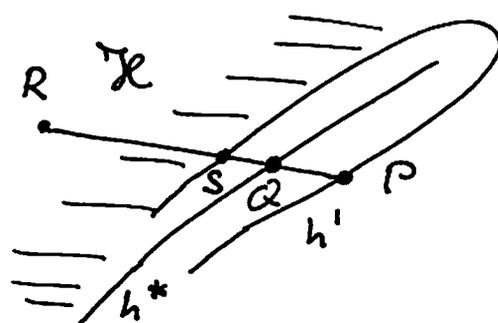
Es folgt mit $h' \subseteq h^* \cup \mathcal{X}^*$: $h' \subseteq \mathcal{X}^*$. Analog folgt mit $h^* \subseteq h' \cup \mathcal{X}'$: $h^* \subseteq \mathcal{X}'$. Wähle nun $R \in \mathcal{X}$ fest und $P \in h' \subseteq \mathcal{X}^*$.

Mit $R \in \mathcal{X}$, $P \in \mathcal{X}^*$ folgt nach dem Halbebenenaxiom:

$\overline{RP} \cap h^* = \{Q\}$ mit $Q \neq P$

Analog folgt:

$R \in \mathcal{X}$, $Q \in h^* \subseteq \mathcal{X}'$,



also wiederum nach dem Halbebenenaxiom, angewandt auf h' :

$$\overline{QR} \cap h' = \{S\} \text{ mit } S \neq Q \text{ (wegen } S \in h', Q \in h^* \text{ und } h' \cap h^* = \emptyset).$$

Es folgt nun insbesondere aufgrund der Lage: $S \neq P$.

Nach Inkidenzaxiom 2 gilt nun wegen $S, P \in h'$: $h' = SP$ und somit:

$$R \in SP = h' \not\downarrow (R \in \mathcal{H} \text{ und } \mathcal{H} \cap h' = \emptyset !!)$$

Also haben wir auch in diesem Fall einen Widerspruch erhalten, d.h.

$$h' \cap h^* = \emptyset \text{ ist nicht möglich!}$$

Somit bleibt alleine übrig: $\boxed{h' = h^*}$

§3 Spiegelungen und Streckungen

In diesem Kapitel werden wir STRUKTURERHALTENDE ABBILDUNGEN der Ebene E auf sich einführen. Mit ihrer Hilfe können wir dann weitere wichtige geometrische Begriffe erklären. Solche Begriffe sind z.B. das LOT von einem Punkt auf eine Gerade. Die Abbildungen der Ebene auf sich bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben α, β, γ usw; die Bilder von Punkten oder Punktmenge unter diesen Abbildungen kennzeichnen wir durch einfaches Vorsetzen des entsprechenden Symbols für die Abbildung, um größtmögliche Übersichtlichkeit zu erzielen. Nur in Ausnahmefällen verwenden wir Klammern.

Beispiel: $\alpha: E \rightarrow E$ sei eine Abbildung von E auf E .

Statt $\alpha(P)$ schreiben wir αP ,

statt $\alpha(PQ)$ schreiben wir αPQ ,

statt $\alpha(W)$ schreiben wir αW ,

statt $(\alpha P)(\alpha Q)$ schreiben wir $\alpha P \alpha Q$.

Die Verkettung " \circ " von Abbildungen α, β schreiben wir ebenfalls verkürzt:

Statt $(\alpha \circ \beta)(P)$ benutzen wir $\alpha \beta P \left(= \alpha(\beta(P)) \right)$.

Die STRUKTUR von E ist gegeben durch die Geradenmenge G , die Abstandsfunktion $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$, die Winkelmaßfunktion $\omega: \Omega \rightarrow [0, 180]$.

Soll eine Abbildung die Struktur "erhalten", so muß sie Geraden in Geraden überführen (GERADENTREUE), Punktepaare in Punktepaare gleichen Abstandes (LÄNGENTREUE) und Winkelfelder in Winkelfelder gleichen Winkelmaßes (WINKELMABTREUE).

Aufgabe 3.1: Man beweise, daß eine geraden- und längentreue Bijektion $\alpha: E \rightarrow E$ eine geraden- und längentreue Umkehrabbildung α^{-1} besitzt.

Definition 3.1:

Eine Bijektion $\beta: E \rightarrow E$ heißt KONGRUENZABBILDUNG, wenn sie GERADEN- und MABTREU ist, d.h. die Eigenschaften

$$(1) \bigwedge_{g \in G} \beta g \in G \quad (\text{GERADENTREUE})$$

$$(2) \begin{matrix} \triangle \\ P \in E & Q \in E \end{matrix} \quad d(P, Q) = d(\beta P, \beta Q) \quad (\text{LÄNGENTREUE})$$

$$(3) \begin{matrix} \triangle \\ W \in \Omega \end{matrix} \quad \omega(W) = \omega(\beta W) \quad (\text{WINKELMAßTREUE})$$

besitzt.

Bemerkung 3.1:

Die Forderung (3) ist nur sinnvoll, wenn β winkelfeldtreu ist.

Satz 3.1:

Jede geraden- und längentreue Bijektion $\alpha: E \rightarrow E$ ist winkelfeldtreu.

Beweis:

(a) Wir zeigen zuerst, daß α STRECKENTREU ist:

$$X \in \overline{PQ} \Leftrightarrow X \in \overline{PQ} \wedge$$

$$d(P, X) + d(X, Q) = d(P, Q)$$

$$\implies \alpha X \in \alpha \overline{PQ} \wedge d(\alpha P, \alpha X) + d(\alpha X, \alpha Q) = d(\alpha P, \alpha Q)$$

(2)

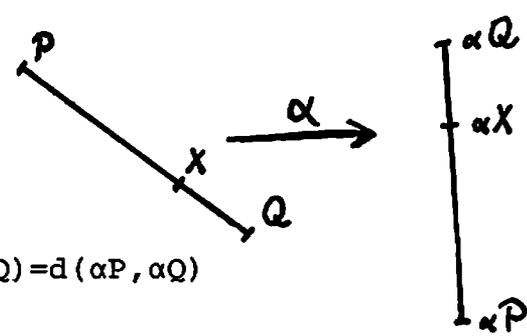
$$\stackrel{(1)}{\implies} \alpha X \in \alpha P \alpha Q \wedge d(\alpha P, \alpha X) + d(\alpha X, \alpha Q) = d(\alpha P, \alpha Q)$$

$$\implies \alpha X \in \overline{\alpha P \alpha Q} \implies \alpha \overline{PQ} \subset \overline{\alpha P \alpha Q} \quad (*)$$

Wendet man α^{-1} auf die Strecke $\overline{\alpha P \alpha Q}$ an, so ergibt sich:

$$\alpha^{-1} \overline{\alpha P \alpha Q} \subset \overline{\alpha^{-1} \alpha P \alpha^{-1} \alpha Q} = \overline{PQ} \stackrel{\alpha}{\supset} \overline{\alpha P \alpha Q} \subset \alpha \overline{PQ} \quad (**)$$

Aus (*) und (**) folgt zusammen: $\alpha \overline{PQ} = \overline{\alpha P \alpha Q}$.



(b) Wir zeigen jetzt, daß α HALBGERADENTREU ist:

$$X \in \overleftarrow{PQ} \Leftrightarrow X \in \overleftarrow{PQ} \vee Q \in \overleftarrow{PX} \quad (\text{Def})$$

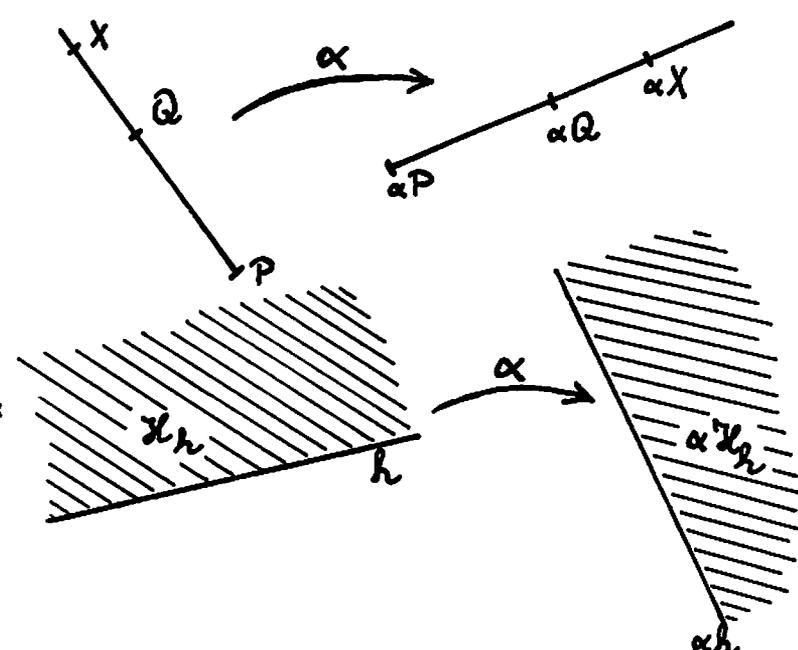
$$\Leftrightarrow \alpha X \in \overleftarrow{\alpha P \alpha Q} \vee \alpha Q \in \overleftarrow{\alpha P \alpha X}$$

(a)

$$\Leftrightarrow \alpha X \in \overleftarrow{\alpha P \alpha Q} \quad (\text{Def})$$

(Def)

(c) Wir schließen nun, daß α HALBEBENENTREU ist:



Fielen zwei verschiedene Punkte $P, Q \in H_h$ einer Halbebene H_h von h bei der Abbildung α in verschiedene Halbebenen von αh , so müßte gelten:

$\overline{\alpha P Q} \cap \alpha h = \overline{\alpha P \alpha Q} \cap \alpha h \neq \{ \}$. Damit würde auch folgen:

$\overline{PQ} \cap h \neq \{ \}$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Konvexität von H_h !

Also gilt: $\alpha H_h \subset H_{\alpha h}$ (*). Analog folgt:

$\alpha^{-1} H_{\alpha h} \subset H_{\alpha^{-1} \alpha h} = H_h \xrightarrow{\alpha} H_{\alpha h} \subset \alpha H_h$ (**).

Aus (*) und (**) folgt: $H_{\alpha h} = \alpha H_h$.

(d) Aus (c), (b) ergibt sich unmittelbar der Satz.

Aufgabe 3.2:

Sind $\alpha: E \rightarrow E$ und $\beta: E \rightarrow E$ geraden-, längen- und winkelmaßtreu Bijektionen, so gilt das auch für die Verkettung $\beta \alpha$.

Definition 3.2:

Eine Bijektion $\alpha: E \rightarrow E$ heißt eine ÄHNLICHKEITSABBILDUNG, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (1) $\bigwedge_{g \in G} \alpha g \in G$ (GERADENTREUE)
- (2) $\bigvee_{r \in \mathbb{R}^+} \bigwedge_{P \in E} \bigwedge_{Q \in E} r \cdot d(P, Q) = d(\alpha P, \alpha Q)$ (LÄNGENVERHÄLTNISTREUE)
- (3) $\bigwedge_{W \in \Omega} \omega(W) = \omega(\alpha W)$ (WINKELMASTREUE)

Bemerkung 3.2:

Aus der Geraden- und Längenverhältnistreue folgt, dem Beweis von Satz 3.1 entsprechend, die Winkelfeldtreue, so daß (3) eine sinnvolle Forderung ist.

Bemerkung 3.3:

Jede Kongruenzabbildung ist eine Ähnlichkeitsabbildung.

Definition 3.3:

Eine Kongruenzabbildung $\gamma: E \rightarrow E$ heißt ACHSENSPIEGELUNG, wenn gilt:

(1) es existiert eine Fixpunktgerade $g \in G$ unter γ , d.h.

$$\bigwedge_{P \in g} \gamma P = P,$$

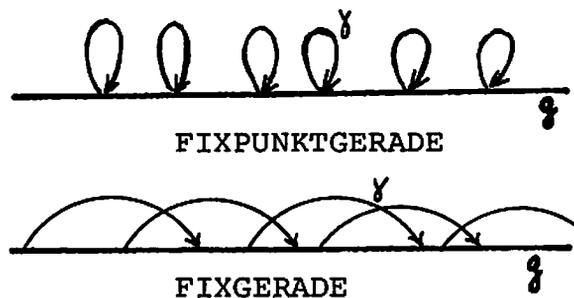
(2) die beiden Halbebenen H_1 und H_2 von g sind Bilder voneinander, d.h. $\gamma H_1 = H_2 \wedge \gamma H_2 = H_1$.

g heißt ACHSE der Spiegelung γ .

Bemerkung 3.4:

Eine Fixpunktgerade besteht nur aus Fixpunkten; dies sind Punkte, die auf sich abgebildet werden.

Im Gegensatz dazu bleibt eine Fixgerade als Ganzes fest: $\gamma g = g$.



AXIOM VIII (SPIEGELUNGSAXIOM):

Zu jeder Geraden $g \in G$ gibt es genau eine Achsenspiegelung γ_g mit g als Achse.

Bemerkung 3.5:

Das Axiom VIII garantiert die Existenz von Kongruenzabbildungen, und zwar als Achsenspiegelungen und deren Verkettungen. Später werden wir zeigen, daß jede Kongruenzabbildung als Verkettung von Achsenspiegelungen darstellbar ist.

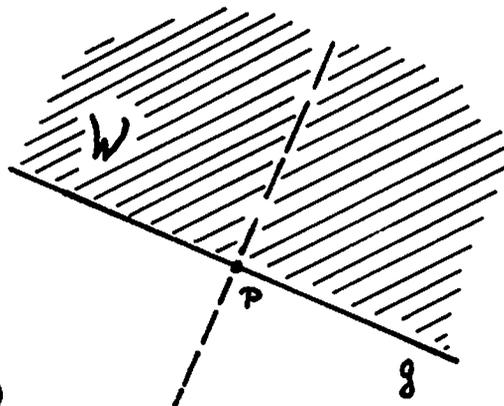
Satz 3.2:

Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt P gibt es genau eine Senkrechte zu g durch P .

Beweis:

(a) 1.Fall: Sei $P \in g$.

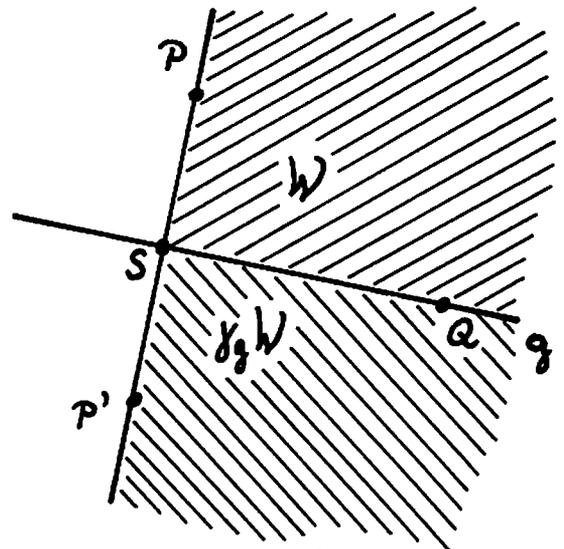
Wir betrachten ein gestrecktes Winkelfeld mit dem Rand g und dem Scheitel P . Zu diesem gibt es genau eine Winkelhalbierende (nach Aufgabe 2.4 auf Seite 2.14)



und diese heißt (nach Def.2.6 auf Seite 2.14) Senkrechte zu g in P .

2.Fall: Sei $P \notin g$.

Die Achsenspiegelung γ_g (Axiom VIII) werfe P nach P' . P und P' liegen in verschiedenen Halbebenen von g (nach Def.3.3). Daher schneidet die Gerade PP' die Gerade g in einem Punkt S :



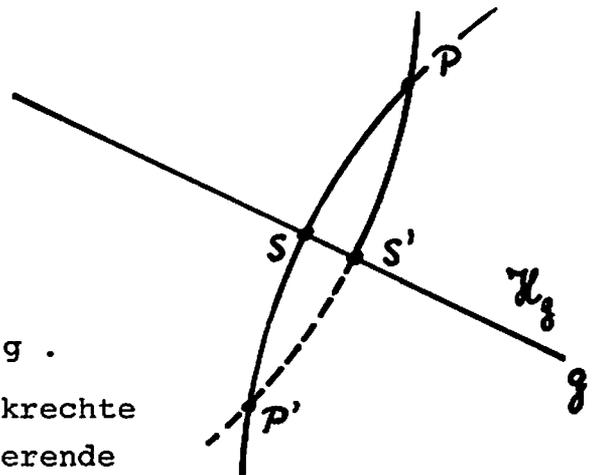
$$PP' \cap g = \{S\}.$$

Sei $Q \in g$ mit $Q \neq S$:

Die Nebenwinkelfelder $w = \sphericalangle PSQ$ und $\gamma_g(w) = \sphericalangle P'SQ$ zerlegen ein gestrecktes Winkelfeld mit dem Rande PP' und besitzen wegen der Winkelmaßtreue von γ_g das gleiche Winkelmaß (nämlich 90°). Nach Definition 2.6 gilt damit: $PP' \perp g$.

Die Existenz einer Senkrechten zu g ist also gesichert.

- (b) Gibt es neben PS noch eine Senkrechte PS' zu g durch P , so ist wegen der Winkelmaßtreue von γ_g auch das Spiegelbild $\gamma_g(PS') = P'S$ senkrecht zu g , d.h. $\gamma_g(PS') \perp g$.



Da es durch S' nur eine Senkrechte zu g gibt (als Winkelhalbierende des gestreckten Winkelfeldes H_g), folgt: $PS' = P'S$.

Damit ist $\{P, P'\} \subset PS'$ und deshalb $PP' = PS'$. Also gilt: $S' = S$. Damit ist die Eindeutigkeit der in Rede stehenden Senkrechten gesichert.

Definition 3.4:

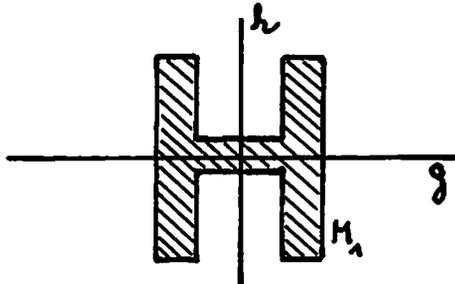
Die eindeutig bestimmte senkrechte Gerade h zu einer gegebenen Geraden g durch einen gegebenen Punkt $P \in E$ heißt das LOT von P auf g ; der Schnittpunkt von h mit g wird LOTFUßPUNKT genannt.

Definition 3.5:

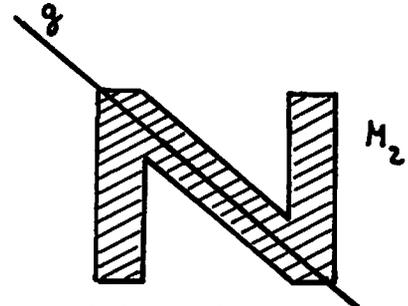
Eine Gerade g heißt SYMMETRIEACHSE einer Teilmenge M von E , wenn gilt $\gamma_g M = M$.

M nennt man ACHSENSYMMETRISCH zu g .

Skizze:



M_1 achsensymmetrisch zu g und h

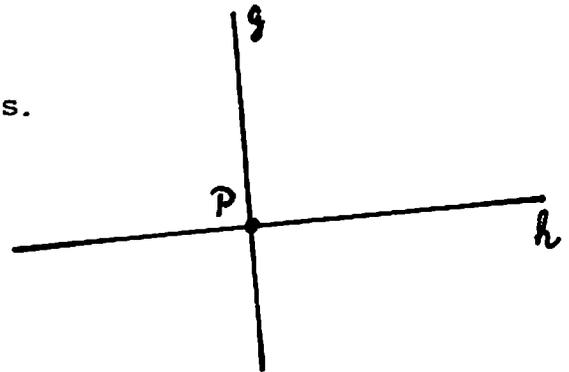


M_2 nicht achsensymmetrisch zu g

Satz 3.3:

Von zwei zueinander senkrechten Geraden ist jede Symmetrieachse der anderen.

Beweis: Aufgabe. Skizze siehe rechts.



Satz 3.4:

Sind g und h Geraden mit $g \perp h$, so bildet die Achsen Spiegelung γ_g jede der beiden Halbebenen H_1, H_2 zu h auf sich ab:

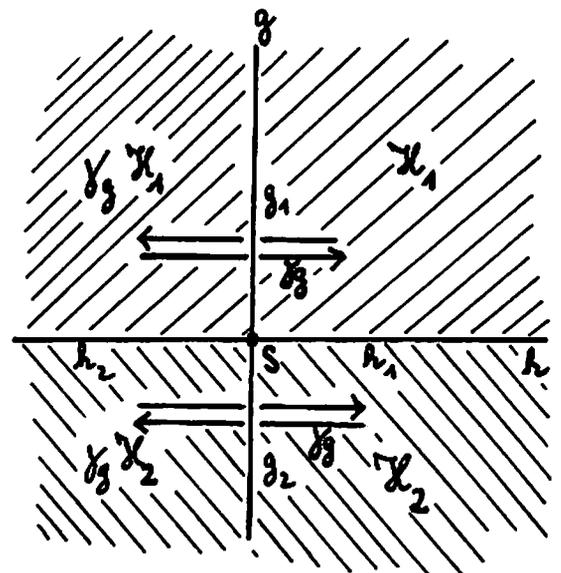
$$\gamma_g H_1 = H_1 \quad \wedge \quad \gamma_g H_2 = H_2$$

Beweis:

Man betrachte nebenstehende Abbildung:

h wird durch γ_g auf sich abgebildet (wobei h_1 auf h_2 und h_2 auf h_1 fällt).

Dann muß $E \setminus h$ wegen der Bijektivität von γ_g auch auf sich abgebildet werden. $E \setminus h$ zerfällt aber in die beiden Halbebenen H_1 und H_2 .



γ_g ist halbebenentreu, daher kann nur gelten:

$$\gamma_g H_1 = H_1 \quad \text{oder} \quad \gamma_g H_1 = H_2 .$$

Da die Punkte von g_1 Fixpunkte von H_1 sind (da sie zu der Achse g der Spiegelung γ_g gehören), können sie nur nach H_1 abgebildet werden, denn es gilt:

$$H_1 \cap H_2 = \{ \} .$$

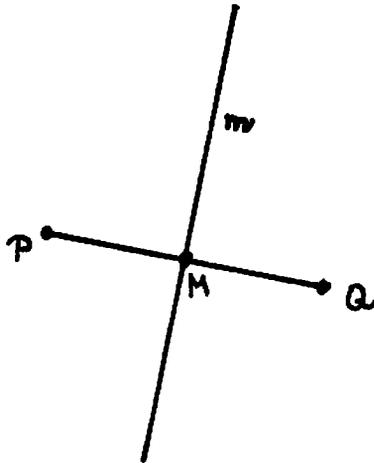
Damit ist jedoch $\gamma_g H_1 = H_2$ ausgeschlossen, d.h. es gilt:

$\gamma_g H_1 = H_1$. Wegen der Bijektivität von γ_g folgt dann unmittelbar: $\gamma_g H_2 = H_2$.

Definition 3.6:

Ist $P \neq Q$ ($P, Q \in E$), so heißt die im Mittelpunkt der Strecke \overline{PQ} errichtete Senkrechte zu PQ MITTELSENKRECHTE von \overline{PQ} .

Skizze:



Satz 3.5:

Ist g die Winkelhalbierende des Winkelfeldes ω , so ist g Symmetrieachse von ω , d.h. es gilt: $\gamma_g \omega = \omega$.

Beweis: (siehe Abb.)

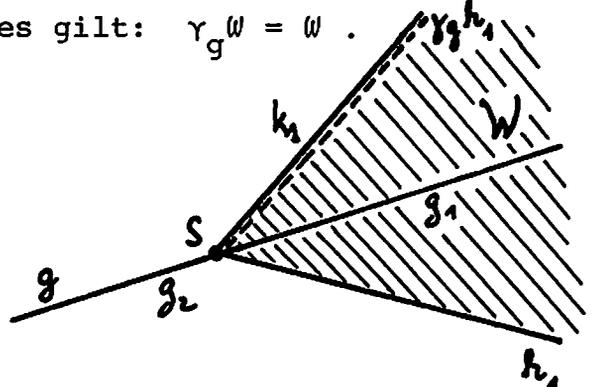
Es ist $\gamma_g \omega = \omega$ nachzuweisen.

Für Nullwinkelfelder ist diese Aussage trivial.

Wir zeigen: Für andere Winkelfelder ist $\gamma_g h_1 = k_1$.

Da g_1 das Winkelfeld ω zerlegt, liegen h_1 und k_1 in verschiedenen abgeschlossenen Halbebenen zu g . Dann liegt aber $\gamma_g h_1$ in derselben abgeschlossenen Halbebene wie k_1 .

g ist Fixpunktgerade; demnach gilt: $\gamma_g g_1 = g_1$.



Wegen der Winkelmaßtreue von γ_g sind die Winkelfelder $\sphericalangle_{g_1} \gamma_g h_1$ und $\sphericalangle_{g_1} k_1$ vom Schenkel g_1 aus in derselben Halbebene zu g mit demselben Maß abgetragen. Die eindeutige Abtragbarkeit sichert nun $\gamma_g h_1 = k_1$.

Analog zeigt man: $\gamma_g k_1 = h_1$.

Die Winkelfeldtreue von γ_g garantiert nun, daß die Teilwinkelfelder $\sphericalangle_{h_1 g_1}$ und $\sphericalangle_{k_1 g_1}$ gegenseitig aufeinander abgebildet werden. Dies bedeutet aber: $\gamma_g \omega = \omega$.

Aufgabe 3.3:

$\text{id}: E \rightarrow E$ sei die identische Abbildung und $\gamma_g: E \rightarrow E$ eine Achsenspiegelung. Man zeige, daß gilt:

$$\gamma_g \gamma_g = \text{id} .$$

Aufgabe 3.4:

Man prüfe, ob jede Achsenspiegelung parallele Geraden in parallele Geraden überführt.

Aufgabe 3.5:

γ sei eine Achsenspiegelung. Ist dann auch γ^{-1} eine Achsenspiegelung?

Aufgabe 3.6:

Die Gerade g schneide die Gerade h senkrecht, d.h. es gelte: $g \perp h$. Man zeige, daß die Achsenspiegelung γ_g die Ordnungsbeziehungen zwischen den Punkten von h vertauscht:

$$\begin{array}{c} \triangle \\ P \in h \end{array} \begin{array}{c} \triangle \\ Q \in h \end{array} P < Q \Rightarrow \gamma_g Q < \gamma_g P .$$

Anl: Hilfreich sind die Lageunterscheidungen für P, Q auf h bezüglich g .

Aufgabe 3.7:

Für $P, Q \in E$ mit $P \neq Q$ ist die Mittelsenkrechte von \overline{PQ} Symmetrieachse von \overline{PQ} .

Anl: Man verwende die Senkrechtbeziehung und die Streckentreue.

Aufgabe 3.8:

Man zeige, daß alle Punkte auf der Mittelsenkrechten einer Strecke von den beiden Randpunkten der Strecke gleich weit entfernt sind.

Aufgabe 3.9:

h sei die Mittelsenkrechte von \overline{PQ} , $P \neq Q$. Man beweise:

$$\bigwedge_{R \in E} d(R, P) = d(R, Q) \rightarrow R \in h.$$

Anl.: Man führe einen indirekten Beweis unter der Annahme, daß gilt: $R \in h$. An der Winkelhalbierenden g von $\sphericalangle PRQ$ durch γ_g spiegeln und \overline{RP} in \overline{RQ} überführen. Warum ist dabei $\gamma_g P = Q$? Warum ist dann $PQ \perp g$? Warum schneidet g die Strecke \overline{PQ} in der Mitte? Warum ist $g = h$?

Definition 3.7:

Gegeben seien ein Punkt $Z \in E$ und eine reelle Zahl $k \neq 0$.

Eine Abbildung $\sigma: E \rightarrow E$

heißt STRECKUNG mit dem ZENTRUM Z und dem STRECKFAKTOR k, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

$$(1) \bigwedge_{P \in E} d(Z, \sigma P) = |k| \cdot d(Z, P)$$

$$(2) \bigwedge_{P \in E \setminus \{Z\}} (k > 0 \rightarrow \sigma P \in \overline{ZP} \wedge k < 0 \rightarrow \sigma P \in ZP \setminus \overline{ZP})$$

Aufgabe 3.10:

Man mache sich die Eigenschaften (1) und (2) für $k=3$ und $k=-2$ zeichnerisch klar. Dabei lege man "nichtkrumme" Linien in der Zeichenebene als "Geraden" zugrunde (so, wie das bisher in fast allen Zeichnungen getan wurde).

Aufgabe 3.11:

Man prüfe, ob die Hintereinanderausführung von zwei Achsen Spiegelungen wieder eine Achsen Spiegelung ist.

Aufgabe 3.12:

Man beweise, daß jede Streckung $\sigma: E \rightarrow E$ mit dem Streckfaktor $k \neq 1$ genau ihr Zentrum als Fixpunkt besitzt.

Bemerkung 3.6: Im Falle $k=1$ gilt für jede Streckung:
 $\sigma = \text{id}$.

Aufgabe 3.13:

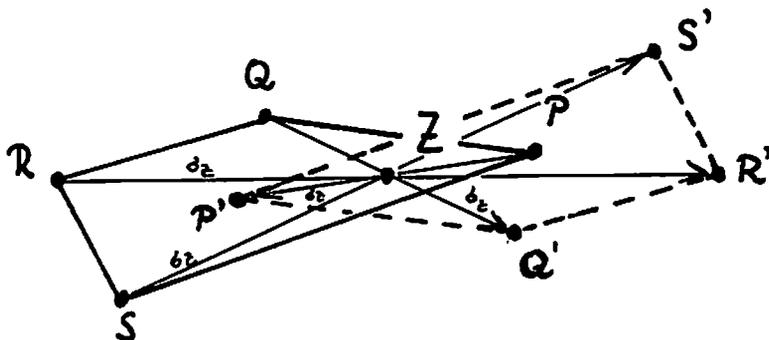
σ sei eine Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor $k \neq 0$. g sei eine Gerade durch Z . Man beweise: Ist $k > 0$, so werden die beiden Halbebenen H_1 und H_2 zu g auf sich abgebildet; ist $k < 0$, so werden die Halbebenen durch σ vertauscht.

Anl: Man denke sich die Halbebenen mittels Halbgeraden erzeugt.

Definition 3.8:

Eine Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor $k = -1$ heißt PUNKTSPIEGELUNG σ_Z an Z .

Skizze:



Aufgabe 3.14:

Man beweise, daß für Punktspiegelungen σ_Z gilt:

$$\sigma_Z \sigma_Z = \text{id}.$$

Jede Punktspiegelung läßt sich durch die uns bekannten Achsenspiegelungen darstellen:

Satz 3.6:

Sind γ_g, γ_h Achsenspiegelungen mit zueinander senkrechten Achsen g und h , die sich in Z schneiden, dann gilt:

$$\gamma_h \gamma_g = \sigma_Z.$$

Beweis zu Satz 3.6:

Wir zeigen, daß $\gamma_h \gamma_g$ eine Streckung mit dem Streckfaktor $k=-1$ und dem Zentrum Z ist:

$$\gamma_h \gamma_g P \in ZP \setminus \overline{ZP} \quad \text{und}$$

$$d(Z, \gamma_h \gamma_g P) = d(Z, P) .$$

$$\gamma_g \text{ ist winkelmästreu: } \omega(W') = \omega(W)$$

$$\gamma_h \text{ ist winkelmästreu: } \omega(W'') = \omega(W''') .$$

$W' \cup W''$ ist Zerlegung eines Rechtwinkelfeldes: $\omega(W') + \omega(W'') = 90 .$

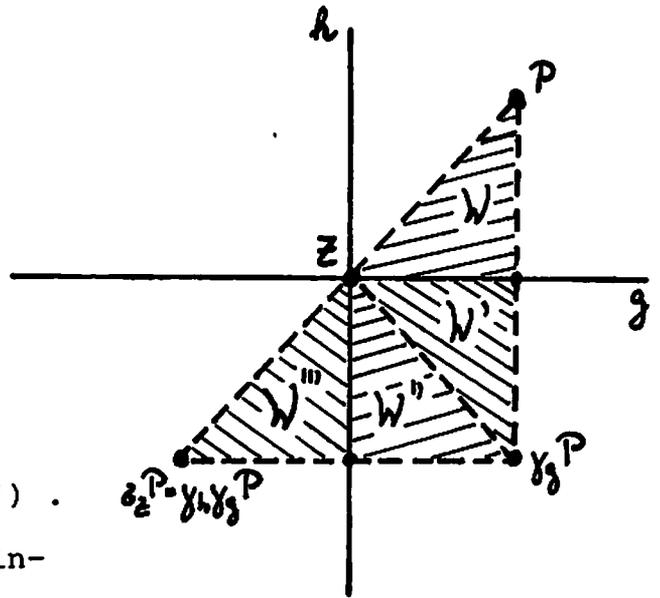
Daraus folgt: $\omega(\sphericalangle PZ\gamma_h \gamma_g P) = 180$. Demnach gilt:

$$\gamma_h \gamma_g P \in ZP \setminus \overline{ZP} \quad (\text{Streckungseigenschaft (2) mit einem Streckfaktor } k < 0) .$$

γ_g und γ_h sind längentreu, daher gilt wegen $Z \in g \cap h$:

$$d(Z, P) = d(Z, \gamma_g P) = d(Z, \gamma_h \gamma_g P) \quad (\text{Streckungseigenschaft (1) mit Streckfaktor } |k| = 1) .$$

Also ist $\gamma_h \gamma_g$ die Punktspiegelung an Z .



Folgerung 3.1:

Da auch $\gamma_g \gamma_h$ die Punktspiegelung an Z liefert, ergibt sich:

Spiegelungen an zueinander senkrechten Achsen sind vertauschbar.

Folgerung 3.2:

Punktspiegelungen sind Kongruenzabbildungen.

NICHTEUKLIDISCHE GEOMETRIE: Das POINCARÉ-Modell der Halbebene

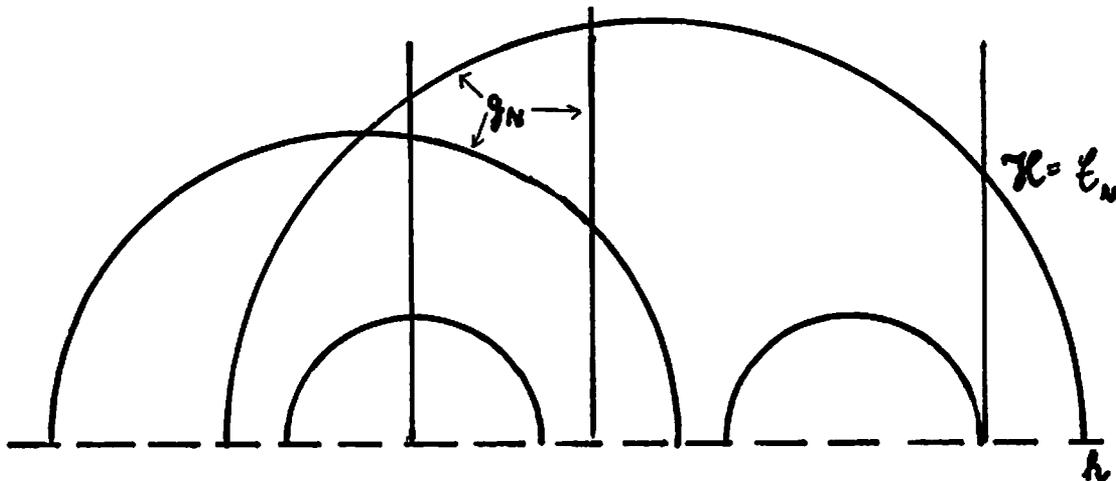
Normalerweise stellen wir uns die geometrische Ebene E als Zeichenebene und in jener die Geraden $g \in G$ als am Lineal gezogene Linien vor.

Das ideale Modell für diese Vorstellungen ist die ebene analytische Geometrie in $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ein weiteres Modell läßt sich aus der analytischen Geometrie durch Umbenennung einiger Objekte ableiten:

Man betrachtet eine offene Halbebene, etwa die obere Halbebene zur x -Achse, $E_N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$,

als NEUE EBENE E_N . Die Menge der NEUEN GERADEN, G_N , wird gebildet aus allen "Halbkreisen" in E_N mit dem Mittelpunkt auf der x -Achse und allen zur x -Achse senkrechten "Halbgeraden" mit dem Anfangspunkt auf der x -Achse. Dabei bedeuten die Anführungsstriche, daß die Punkte der x -Achse nicht zu den Geraden dazuzählen, d.h. die Geraden sind an der x -Achse offen.



Zur Prüfung der Geometrieeigenschaften des Modells ziehen wir unser Axiomensystem heran, das wir hier zusammengefaßt wiedergeben:

- I : Jeder Geraden gehören mindestens zwei (voneinander verschiedene) Punkte an.
- II : Durch je zwei (voneinander verschiedene) Punkte von E_N geht genau eine Gerade von G_N .
- III: Es gibt drei nicht auf ein und derselben Geraden gelegene Punkte in E_N .

IV : Auf jeder Geraden $g_N \in G_N$ existiert eine lineare, strenge Ordnungsrelation $<_{g_N}$.

V : Es gibt eine (1)symmetrische, (2)additive und (3)eindeutig abtragbare Abstandsfunktion $d_N: E_N \times E_N \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

VI : Jede Gerade g_N teilt $E \setminus g_N$ in zwei (1)konvexe Klassen H_{N_1}, H_{N_2} ein. Dabei gilt:
 (2) $\triangle PEH_{N_1} \cong \triangle QEH_{N_2}$ $\overline{PQ} \cap g_N = \{ \}$.

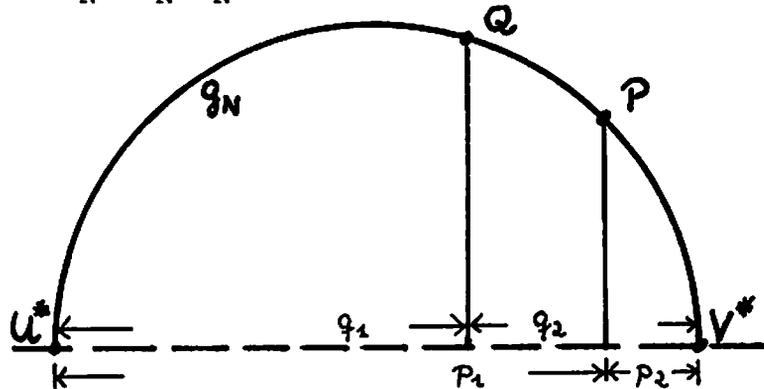
VII: Es gibt eine (1)additive, (2)eindeutig abtragbare Winkelmaßfunktion $\omega_N: \Omega_N \rightarrow [0, 180]$.

VIII: Zu jeder Geraden $g_N \in G_N$ existiert genau eine Achsen-spiegelung γ_{g_N} mit g_N als Achse.

Die Axiome I, II, III, IV sind erfüllt, wie man leicht sieht.

V : Die Metrik $d_N: E_N \times E_N \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ setzen wir folgendermaßen fest:

(a)

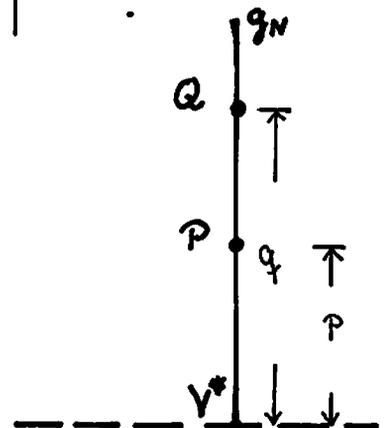


Liegen P und Q auf einer N -Geraden g_N , die durch einen (bei U^* und V^* offenen) Halbkreis dargestellt wird, so setzen wir mit den euklidischen Entfernungen p_1, p_2, q_1, q_2 fest:

$$d_N(P, Q) = \left| \ln \left(\frac{p_1}{p_2} : \frac{q_1}{q_2} \right) \right| .$$

(b) Liegen P und Q auf einer N -Geraden, die durch eine senkrechte Halbgerade (ohne Anfangspunkt) dargestellt wird, so setzen wir entsprechend fest:

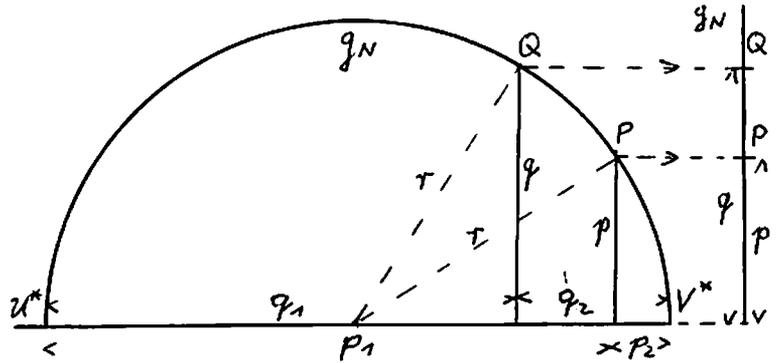
$$d_N(P, Q) = 2 \left| \ln \frac{q}{p} \right| .$$



Bemerkung 3.7:

Die Festsetzung (b) kann man als Grenzfall von (a) für $U^* \rightarrow \infty$ bzw. $r \rightarrow \infty$ deuten.

Dabei streckt sich die "halbkreisförmige Gerade" g_N zu einer senkrechten Halbgeraden" g_N .



Die Entfernung $d_N(Q, P) = \left| \ln \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{p_1}{p_2} \right|$ transformiert sich wie folgt:

Mit $r^2 = q^2 + (r - q_2)^2$ und $r^2 = p^2 + (r - p_2)^2$ ergibt sich durch Auflösen nach q_2 bzw. p_2

$$\begin{aligned} \ln \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{p_1}{p_2} &= \ln \frac{2r - q_2}{r - \sqrt{r^2 - q^2}} \cdot \frac{r - \sqrt{r^2 - p^2}}{2r - p_2} = \ln \frac{r + \sqrt{r^2 - q^2}}{r + \sqrt{r^2 - p^2}} \cdot \frac{r - \sqrt{r^2 - p^2}}{r - \sqrt{r^2 - q^2}} \\ &= \ln \frac{(r + \sqrt{r^2 - q^2})(r - \sqrt{r^2 - p^2})(r + \sqrt{r^2 - p^2})(r + \sqrt{r^2 - q^2})}{(r + \sqrt{r^2 - p^2})(r - \sqrt{r^2 - q^2})(r + \sqrt{r^2 - q^2})(r + \sqrt{r^2 - p^2})} \\ &= \ln \frac{(r + \sqrt{r^2 - q^2})^2 p^2}{(r + \sqrt{r^2 - p^2})^2 q^2} = \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}}) p^2}{(1 + \sqrt{1 - \frac{p^2}{r^2}}) q^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \ln \frac{p^2}{q^2}. \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\lim_{U^* \rightarrow \infty} d_N(Q, P) = \left| \ln \left(\frac{p}{q} \right)^2 \right| = 2 \left| \ln \frac{p}{q} \right| = 2 \left| \ln \frac{q}{p} \right|.$$

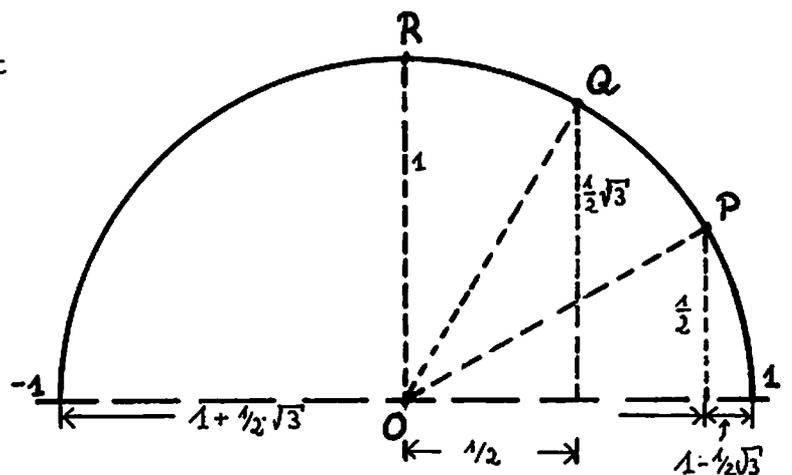
Nach Konstruktion bildet d_N in \mathbb{R}_0^+ ab.

Aufgabe 3.15:

Man bestimme die "Länge der Geraden" im N-Modell durch Betrachtung der Grenzübergänge $Q \rightarrow U^*$ bzw. $P \rightarrow V^*$ (vgl. dazu die Abbildungen auf Seite 3.13).

Aufgabe 3.16:

Man prüfe die Additivität der Entfernungsfunktion d_N am Beispiel der 3 Punkte P, Q, R in der Zeichnung.



Aufgabe 3.17:

Man zeige, daß $d_N: E_N \times E_N \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ (1) symmetrisch, (2) additiv, (3) eindeutig abtragbar ist.

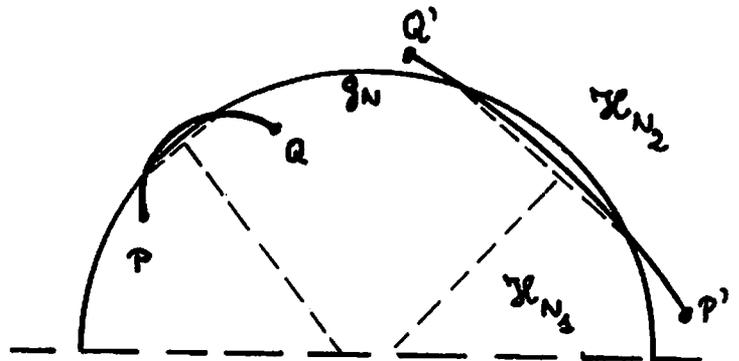
Prüfen wir nun das Erfülltsein des Axioms VI:

Absatz VI, (2) und die Konvexität der Halbebenen für den Fall, daß g_N durch eine klassische Halbgerade dargestellt wird, treffen mit Sicherheit zu.

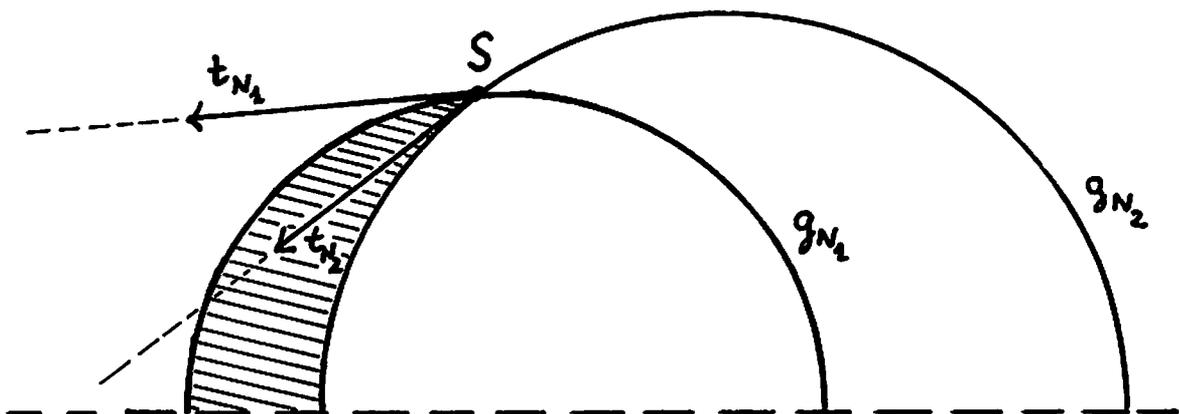
Aufgabe 3.18:

Man beweise, daß die beiden Halbebenen H_{N_1} und H_{N_2} , in die $E_N \setminus g_N$ durch die "halbkreisförmige Gerade" g_N zerlegt wird, konvex sind.

Anl: Die Annahme des Gegenteils führt zu einer gemeinsamen Sehne (oder Tangente) der zerlegenden "Geraden" g_{N_1} und der "Verbindungsstrecke" \overline{PQ} (bzw. $\overline{Q'P'}$).



Prüfen wir das Erfülltsein des Axioms VII:



Winkelfelder entstehen als Durchschnitte von abgeschlossenen Halbebenen zu sich schneidenden Geraden bzw. als Nullwinkelfeld oder gestrecktes Winkelfeld entsprechend den Festsetzungen auf Seite 2.6 .

Wir legen nun im Schnittpunkt von zwei N-Geraden die euklidischen Tangenten (t_{N_1}, t_{N_2}) "an die N-Geraden" und ordnen dem N-Winkelfeld das "natürliche" Maß ω des Winkel-feldes zu, welches die "passenden" Halbtangenten als Rand besitzt: (s.dazu die Abb. auf Seite 3.15 unten)

$$\omega \star_{g_{N_1}, g_{N_2}} := \omega \star_{t_{N_1}, t_{N_2}} .$$

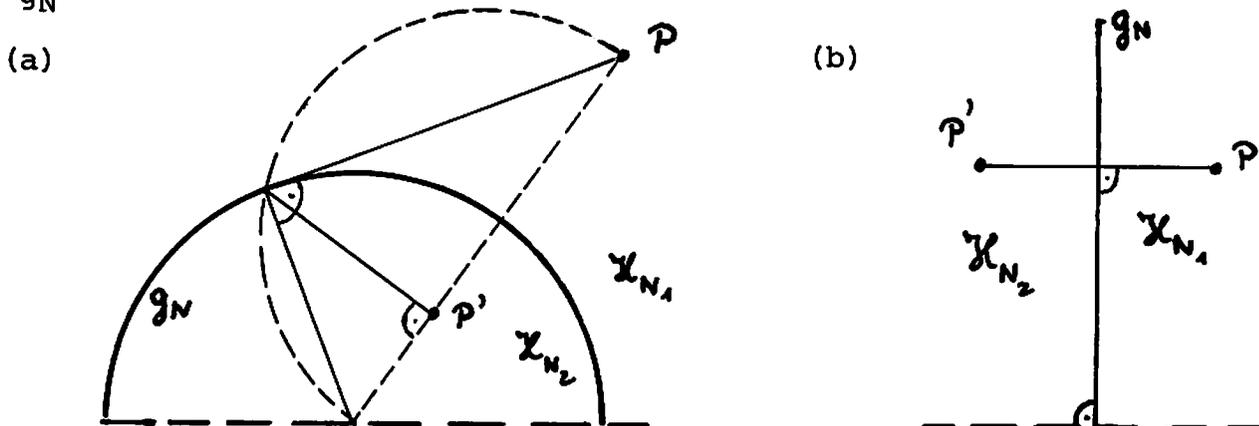
Man erkennt leicht, daß die so auf das klassische Winkelmaß zurückgeführte Winkelmaßfunktion additiv ist.

Aufgabe 3.19:

Man mache sich elementargeometrisch klar, daß die Winkelmaße eindeutig abtragbar sind.

Erfülltsein des Axioms VIII:

Die Achsenspiegelung zu einer gegebenen Geraden g_N wird nach der Konstruktionsvorschrift durchgeführt, die aus den folgenden Zeichnungen zu ersehen ist (darin sind P und P' voneinander Spiegelpunkte, d.h. $\gamma_{g_N} P = P'$ und $\gamma_{g_N} P' = P$).



Die Zeichnungen zeigen, daß

- (1) g_N eine Fixpunktgerade unter γ_{g_N} ist;
- (2) die beiden Halbebenen zu g_N unter γ_{g_N} Bilder voneinander sind.

Damit sind die Achsenspiegelungsbedingungen (1), (2) von Seite 3.4 erfüllt.

Man kann (sehr umständlich) zeigen, daß $\gamma_{\mathfrak{GN}}$ eine Kongruenzabbildung ist, d.h. sie ist geraden-, längen-, winkelfeld- und winkelmaßtreu.

Wir wollen uns die damit verbundene Mühe ersparen.

Es bleibt zu konstatieren, daß das entwickelte Modell zur Veranschaulichung der aus unserem Axiomensystem abgeleiteten Sätze und Zusammenhänge ebenso geeignet ist wie die bisher von uns bevorzugte euklidische Darstellungsform.

§4 Sätze der Elementargeometrie und das Streckungsaxiom

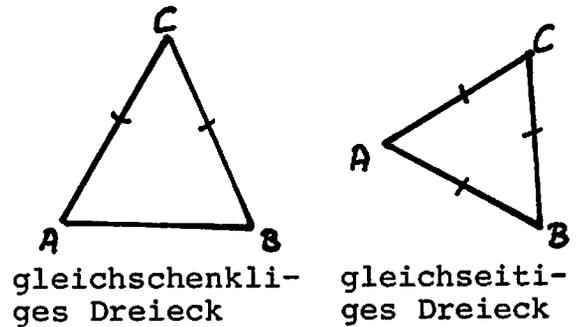
Viele Sätze der Elementargeometrie haben Aussagen über Dreiecke zum Inhalt.

Definition 4.1:

Jede Menge von drei nicht kollinearen Punkten, $\{P, Q, R\}$, heißt ein DREIECK. Die Punkte P, Q, R heißen ECKEN, die Strecken \overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RP} heißen SEITEN, die Winkelfelder $\sphericalangle PQR$, $\sphericalangle QRP$, $\sphericalangle RPQ$ heißen INNENWINKELFELDER des Dreiecks.

Definition 4.2:

Jedes Dreieck heißt GLEICHSCHENKLIG, wenn zwei seiner Seiten gleich lang sind; es heißt GLEICHSEITIG, wenn alle drei Seiten gleich lang sind.

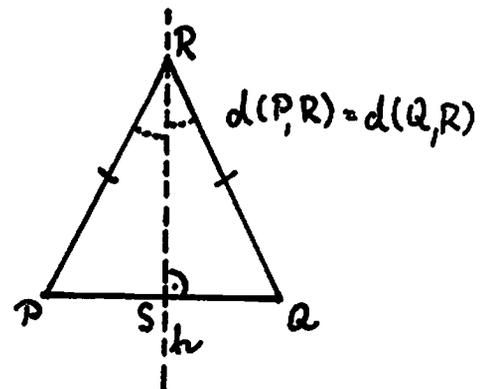


Satz 4.1:

In jedem gleichschenkligen Dreieck ist die Mittelsenkrechte der dritten Seite eine Winkelhalbierende.

Beweis: Aufgabe

Anleitung: Man betrachte die Achsenspiegelung γ_h an der Mittelsenkrechten h und verwende das Ergebnis aus Aufgabe 3.9 (Seite 3.9), um zu zeigen: $R \in h$

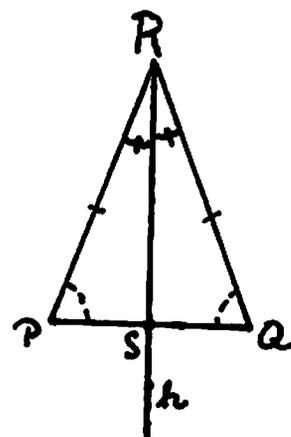


Satz 4.2:

In jedem Dreieck liegen gleich langen Seiten die Scheitel von gleich großen Innenwinkelfeldern gegenüber.

Beweis:

Die Spiegelung γ_h an der Halbierenden h des dritten Innenwinkelfeldes $\sphericalangle PRQ$ bildet die Scheitel P und Q der zu vergleichenden Winkelfelder aufeinander ab und - da S und R Fixpunkte sind - auch die entsprechenden Schenkel. Wegen der Winkelmaßtreue von γ_h ist $\omega(\sphericalangle RPS) = \omega(\sphericalangle RQS)$.



Satz 4.3:

Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt $P \notin g$ gibt es mindestens eine Parallele h zu g , die P enthält.

Beweis:

Von P aus fällen wir das Lot l auf g : $l \cap g = \{Q\}$.

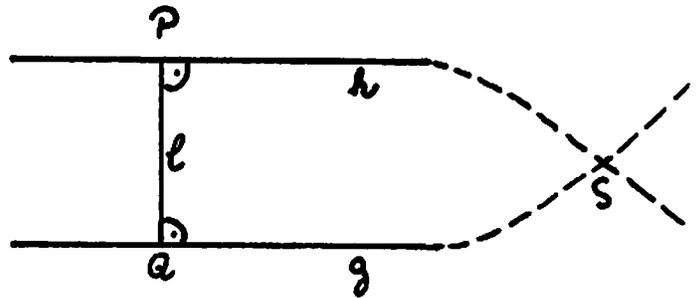
In P errichten wir eine Senkrechte h zu l . Dann

ist h eine Parallele zu g :

Wäre nämlich $h \cap g = \{S\} \neq \emptyset$,

so gäbe es von S aus zwei verschiedene Lote g und h auf PQ ,

was der eindeutigen Bestimmtheit des Lotes widerspricht (siehe dazu Satz 3.2 auf Seite 3.4).



Satz 4.4:

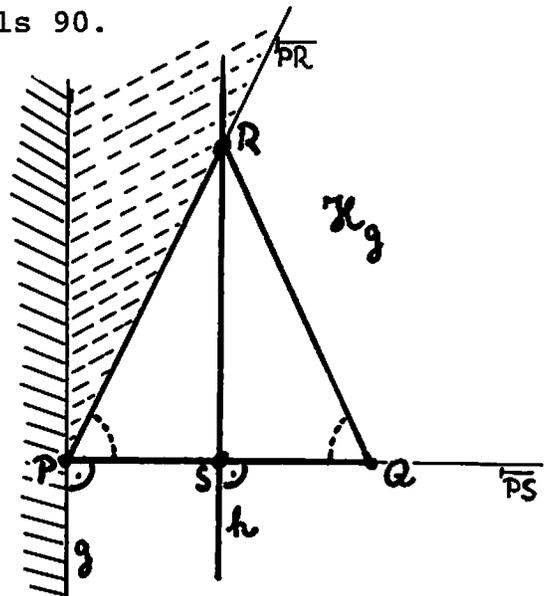
In jedem gleichschenkligen Dreieck ist das Maß der beiden gleich großen Winkelfelder kleiner als 90° .

Beweis:

Es sei gemäß nebenstehender Skizze $\omega(\sphericalangle RPS) = \omega(\sphericalangle RQS)$.

Durch P legen wir eine Senkrechte g zu PS ; diese ist nach obigem Beweis zu Satz 4.3 parallel zur Mittelsenkrechten h der Strecke \overline{PQ} . In der Halbebene H_g zu g , in der h liegt, liegen

S und R . \overline{PS} zerlegt das gestreckte Winkelfeld $H_g \cup g$ in zwei Rechtwinkelfelder, und \overline{PR} zerlegt eines dieser Rechtwinkelfelder nichttrivial. Daher ist $\omega(\sphericalangle RPS) < 90^\circ$.

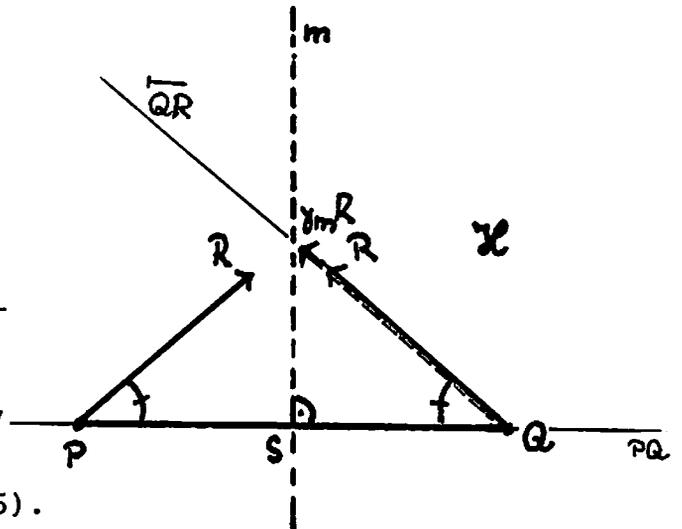


Satz 4.5:

Haben in einem Dreieck zwei Winkelfelder das gleiche Maß, so sind die entsprechenden ("gegenüberliegenden") Seiten gleich lang.

Beweis zu Satz 4.5:

Es sei gemäß nebenstehender Skizze $\omega(\sphericalangle QPR) = \omega(\sphericalangle PQR)$ (*) und m die Mittelsenkrechte von \overline{PQ} . \overline{PQ} geht beim Spiegeln an m in sich über, wobei P und Q vertauscht werden und der Mittelpunkt S festbleibt. Die Halbebene H zu \overline{PQ} , welche R enthält, wird durch γ_m auf sich abgebildet (siehe Satz 3.4 auf Seite 3.6).



Wegen der Winkelmaßtreue von γ_m gilt:

$$\omega(\sphericalangle PQ\gamma_m R) = \omega(\sphericalangle \gamma_m Q\gamma_m P\gamma_m R) = \omega(\sphericalangle QPR) (**).$$

Aus (*) und (**) folgt: $\omega(\sphericalangle PQR) = \omega(\sphericalangle PQ\gamma_m R)$.

Die Winkelfelder $\sphericalangle PQR$ und $\sphericalangle PQ\gamma_m R$ sind also beide an \overline{QP} in H abgetragen und besitzen das gleiche Winkelmaß.

Damit folgt aus dem Winkelmaßaxiom: $\sphericalangle PQR = \sphericalangle PQ\gamma_m R$

und damit $\gamma_m R \in \overline{QR}$. Nach dem gleichen Verfahren findet man $\gamma_m R \in \overline{PR}$, d.h. $\gamma_m R \in \overline{PR} \cap \overline{QR} = \{R\}$.

Die Längentreue von γ_m liefert nun:

$$d(Q, R) = d(\gamma_m P, \gamma_m R) = d(P, R).$$

Satz 4.6:

Von allen Entfernungen eines Punktes P zu den Punkten einer Geraden g ist die zum Lotfußpunkt F die kürzeste.

Beweis:

Zu zeigen ist:

$$\bigwedge_{E \in g \setminus \{F\}} d(P, F) < d(P, E)$$

Angenommen: Es gibt einen Punkt

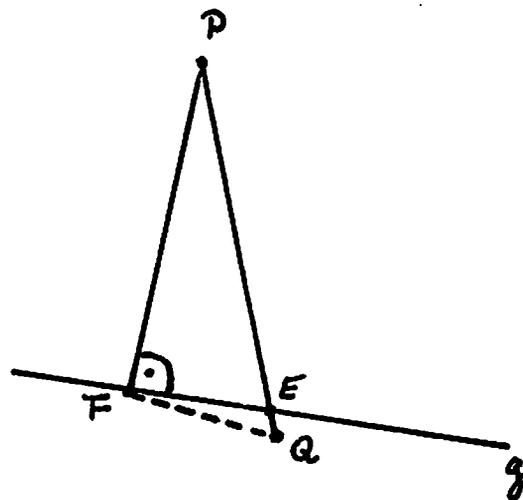
$$E \in g \setminus \{F\} \text{ mit}$$

$$d(P, F) \geq d(P, E).$$

Dann existiert ein

Punkt $Q \in \overline{PE}$ mit

$$d(P, F) = d(P, Q).$$



Dann ist \overline{FE} enthalten im Winkelfeld $\sphericalangle PFQ$,

d.h. $\overline{FE} \subset \sphericalangle PFQ$,

und dieses wird durch \overline{FE} zerlegt in $\sphericalangle PFE$ und $\sphericalangle EFQ$:

$$\sphericalangle PFQ = \sphericalangle PFE \cup \sphericalangle EFQ .$$

Folglich gilt: $\omega(\sphericalangle PFQ) \geq \omega(\sphericalangle PFE) = 90$. (*)

Wegen $d(P,F) = d(P,Q)$ sind die Innenwinkelfelder bei F und Q gleich groß (Satz 4.2).

Als gleich große Winkelfelder in einem Dreieck ist nach Satz 4.4 das Winkelmaß für jedes der beiden Winkelfelder kleiner als 90 :

$$\omega(\sphericalangle PQF) = \omega(\sphericalangle PFQ) < 90 .$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu (*).

Satz 4.7:

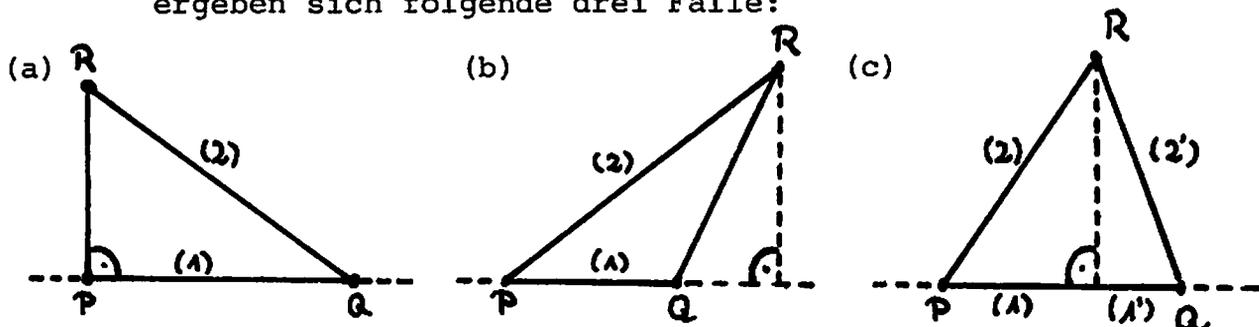
Für beliebige Punkte $P, Q, R \in E$ gilt:

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q) .$$

Das Gleichheitszeichen steht nur im Falle $R \in \overline{PQ}$.

Beweis: Aufgabe

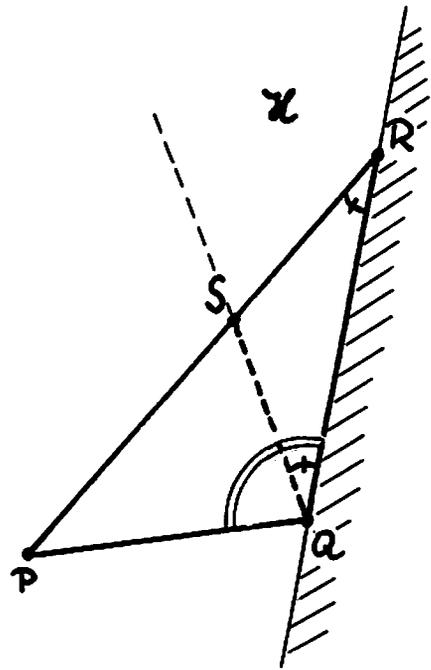
Anleit.: Man unterscheide $R \in PQ$ und $R \notin PQ$. Für $R \notin PQ$ ergeben sich folgende drei Fälle:



Mit Hilfe von Satz 4.6 zeige man, daß jeweils Strecke (1) kürzer ist als Strecke (2) und beweise damit die Gültigkeit der Dreiecksungleichung.

Satz 4.8:

In jedem Dreieck liegt dem Scheitel des größeren von zwei Innenwinkelfeldern die längere Seite gegenüber.



Beweis:

Sei $\omega(\sphericalangle PRQ) < \omega(\sphericalangle PQR)$.

Das kleinere Winkelmaß tragen wir an \overline{QR} in die Halbebene H hinein ab, in der P liegt.

So finden wir $S \in \overline{PR}$.

Dann haben im Dreieck $\{S, Q, R\}$ die Winkelfelder mit den Scheiteln Q und R das gleiche Maß, und es gilt mit Satz 4.5:

$$d(Q, S) = d(R, S).$$

Mit $S \notin \overline{PQ}$, aber $S \in \overline{PR}$ ergibt sich sofort:

$$d(P, Q) < d(P, S) + d(S, Q) = d(P, S) + d(S, R) = d(P, R)$$

Satz 4.9:

In jedem Dreieck liegt der längeren von zwei Seiten der Scheitel des größeren Innenwinkelfeldes gegenüber.

Beweis: Aufgabe

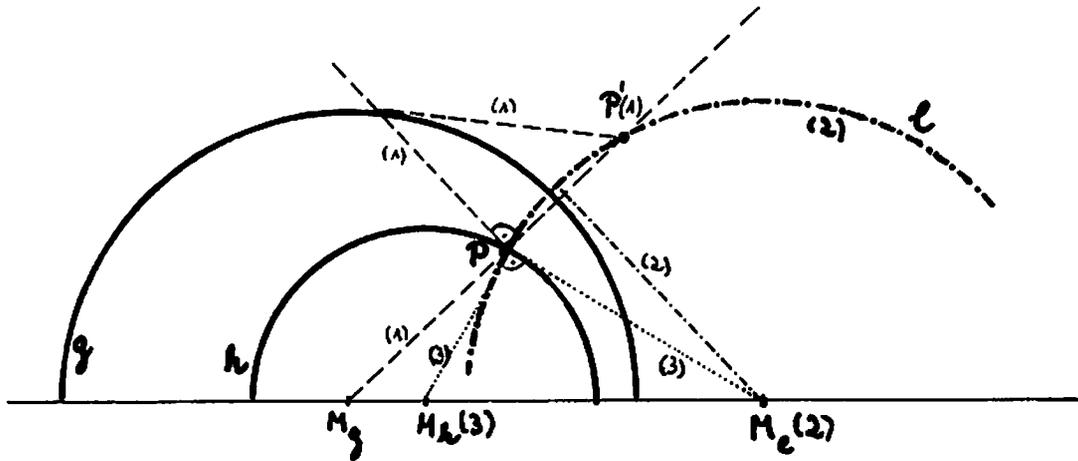
Anl: Man führe den Beweis indirekt und konstruiere einen Widerspruch zu Satz 4.5 bzw. Satz 4.8.

Aufgabe 4.1: In jedem (echten) Dreieck ist jede Seite länger als der Betrag der Differenz der Längen der beiden anderen Seiten.

Unser bisher entwickeltes Axiomensystem mit den daraus abgeleiteten Sätzen - kurz, die bis hierher entwickelte Geometrie - besitzt (mindestens) zwei Modelle. Das eine haben wir stets zur Illustration der zu beweisenden Aussagen herangezogen, das andere am Ende des 3. Kapitels vorgestellt.

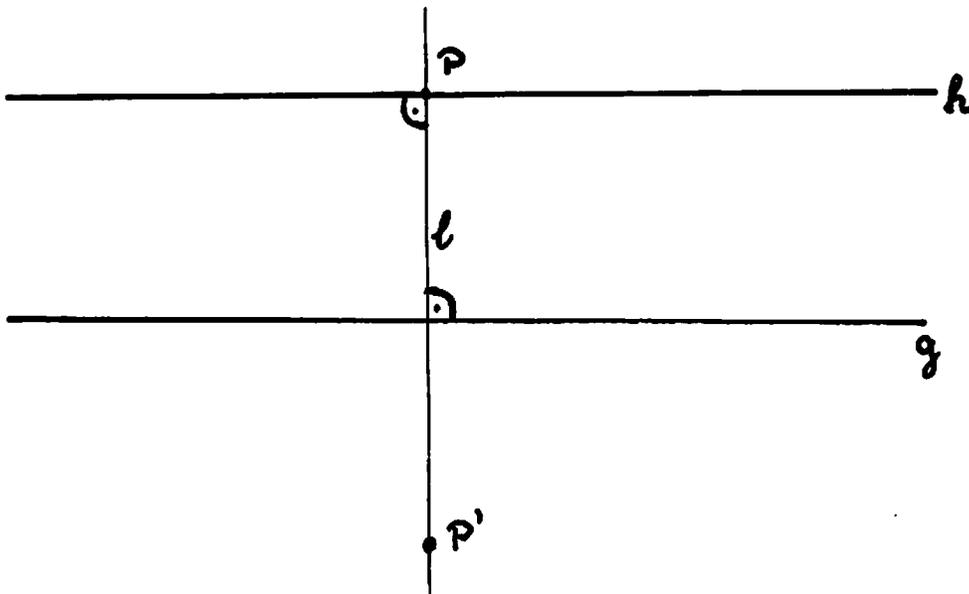
Zum Vergleich demonstrieren wir in beiden Modellen das Auffinden einer Parallelen h zu einer gegebenen Geraden g durch einen nicht auf g befindlichen Punkt P (man vergleiche hierzu Satz 4.3 auf Seite 4.2).

E_N - Modell:



- (1) Konstruktion des Spiegelpunktes von P an g: P'
 - (2) Lot auf g durch P und P': l
 - (3) Senkrechte zum Lot l in P: h
- $h \parallel g$

E - Modell:



Das Lot l durch P und den Spiegelpunkt P' steht senkrecht auf g; die Senkrechte h auf l in P ist Parallele zu g.

Im E -Modell vermuten wir sofort:

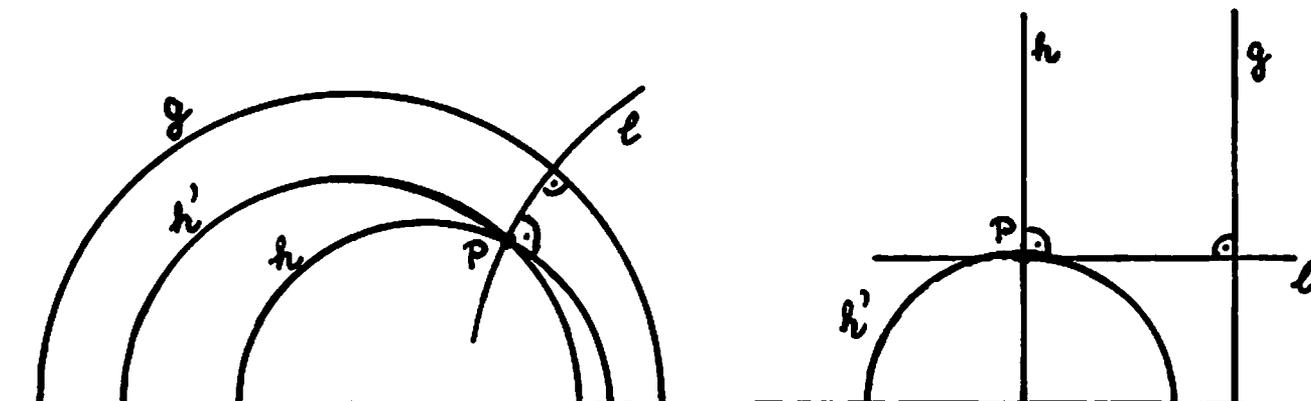
h ist die einzige Parallele zu g durch P .

Diese Tatsache - so plausibel sie erscheint - ist jedoch aus den bisher gegebenen Axiomen I - VIII nicht ableitbar. Schon EUKLID (um 300 v.Chr.) hatte dies erkannt und deshalb in seinem 5. Postulat gefordert:

"Wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, deren Summe kleiner als zwei Rechte ist, dann treffen sich diese beiden Geraden, wenn man sie auf dieser Seite verlängert."

Rund zweitausend Jahre haben die Mathematiker an den Postulatcharakter dieser Aussage nicht geglaubt und versucht, sie als Satz zu beweisen. Dank der Forschungen von LOBATSCHESKI (1826) und Johann BOLYAI (1831) wissen wir heute, daß diese Bemühungen ergebnislos bleiben mußten. Den Grund dafür können wir leicht durch eine einfache Betrachtung in dem von Henri POINCARÉ (1854-1912) entwickelten E_N -Modell der Geometrie erkennen:

Im E_N -Modell gelten alle 8 Axiome, die unsere Geometrie beschreiben, also auch alle Sätze, die sich aus diesen Axiomen ableiten lassen. Wäre der Satz ableitbar, daß es durch einen gegebenen Punkt P außerhalb einer gegebenen Geraden g höchstens eine Parallele h zu dieser Geraden g gibt, so müßte das auch in dem E_N -Modell zutreffen.



Unschwer entnimmt man aber der Abbildung auf der Seite 4.7 unten, daß es neben der über das Lot von P auf g konstruierbaren Parallelen durch P eine (und damit beliebig viele) weitere Parallele h' zu g gibt. Euklids Postulat 5 kann daher nicht ableitbar sein.

Ob wir nun beim weiteren Ausbau unserer Geometrie davon ausgehen müssen, daß es zu jeder Geraden durch jeden Punkt außerhalb dieser Geraden mehrere Parallelen gibt oder ob wir die Tatsache zugrunde legen dürfen, daß es je genau eine solche Parallele gibt, hängt davon ab, was wir axiomatisch fordern, d.h. festlegen.

Die bisher eingeführten Axiome beschreiben die sogenannte ABSOLUTE GEOMETRIE. Ergänzen wir sie durch die Forderung von mindestens zwei Parallelen zu jeder Geraden g durch jeden Punkt $P \notin g$, so gelangen wir zu einer NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE; verbieten wir auf irgendeine Weise die Existenz von mehr als einer solchen Parallelen, so definieren wir die sogenannte EUKLIDISCHE GEOMETRIE. Wir entscheiden uns für den zuletzt genannten Weg.

In dem durchgeführten Aufbau der Geometrie kommt Abbildungen eine große Bedeutung zu. Zuletzt haben wir die STRECKUNGEN

$$\sigma: E \dashrightarrow E$$

mit dem Zentrum $Z \in E$ und dem Streckfaktor $k \neq 0$ durch

$$(1) \quad \bigwedge_{P \in E} d(Z, \sigma P) = |k| \cdot d(Z, P)$$

$$(2) \quad \bigwedge_{P \in E \setminus \{Z\}} \left[k > 0 \rightarrow \sigma P \in \overline{ZP} \wedge k < 0 \rightarrow \sigma P \in ZP \setminus \overline{ZP} \right]$$

eingeführt.

Jetzt wird zusätzlich verlangt:

AXIOM IX (STRECKUNGSAXIOM):

Jede Streckung ist eine Ähnlichkeitsabbildung.

Das Streckungsaxiom setzt uns in die Lage, grundlegende Aussagen über die Parallelität von Geraden zu begründen.

Satz 4.10:

Jede Streckung $\sigma: E \rightarrow E$ bildet jede Gerade g auf eine zu g parallele Gerade σg ab.

Beweis:

Als zu g ähnliches Bild ist σg eine Gerade (Folgerung aus Axiom IX).

1. Fall: σ sei die Identität. Dann ist $\sigma g = g$ und damit $\sigma g \parallel g$.

2. Fall: σ sei nicht die Identität. Dann hat σ genau den Fixpunkt Z .

a) $Z \in g$: Dann gilt für alle $P \in g$: $\sigma P \in g$; die Bildgerade geht durch mindestens zwei Punkte von g und fällt infolge dessen mit g zusammen.

b) $Z \notin g$: Im Falle $\sigma g \cap g = \emptyset$ ist nichts zu beweisen. Sei $\{T\} \subset \sigma g \cap g$. Dann ist $T \neq Z$.

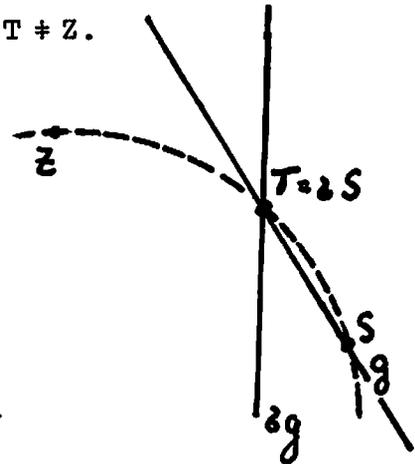
T ist das Bild eines

Punktes $S \in g$:

$$T = \sigma S \wedge S \neq Z.$$

Infolge dessen liegt T auf der Geraden durch S und Z . Es ist also:

$SZ = ST = g$ und damit im Widerspruch zur Voraussetzung: $Z \in g$.



Satz 4.11:

Ist σ eine Streckung mit Streckfaktor k , so gilt:

$$\bigwedge_{P, Q \in E} d(\sigma P, \sigma Q) = |k| \cdot d(P, Q).$$

Beweis:

Da σ eine Ähnlichkeitsabbildung ist, gibt es nach Definition 3.2(2) eine reelle Zahl $c > 0$, so daß gilt:

$$d(Z, \sigma Q) = d(\sigma Z, \sigma Q) = c \cdot d(Z, Q) \quad \text{für } Q \neq Z.$$

Da σ eine Streckung ist, gilt auch $d(Z, \sigma Q) = |k| \cdot d(Z, Q)$

Ein Vergleich ergibt: $c = |k|$.

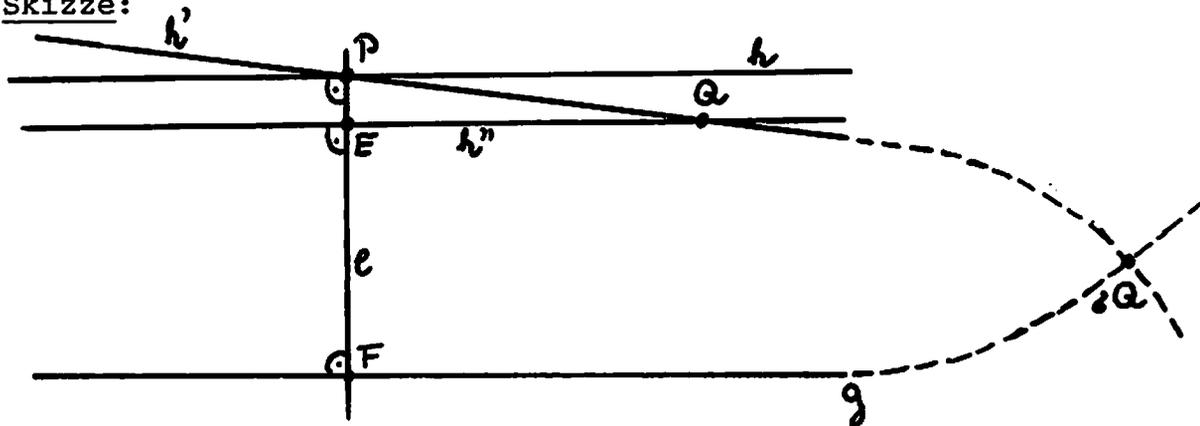
Satz 4.12: (EUKLIDS PARALLELENAUSSAGE)

Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt $P \notin g$ gibt es höchstens eine Parallele h zu g durch P .

Beweis:

Sei h die mittels des Lotes l konstruierte Parallele zu g durch P . h' sei eine zweite Parallele durch P . Man wähle $Q \in h'$ mit $Q \notin h$. Dann falle man das Lot h'' von Q auf l (Fußpunkt sei E).

Skizze:



Es ist $E \neq P$, denn andernfalls wäre $h'' = h$ wegen der Eindeutigkeit der Senkrechten, und es wäre $Q \in h$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Man wähle nun P zum Zentrum einer Streckung σ , welche E in F überführt (der Streckfaktor k ergibt sich aus der Bedingung:

$$d(P, \sigma E) = d(P, F) = |k| \cdot d(P, E)$$

unter Berücksichtigung, ob E und F auf derselben oder auf verschiedenen Halbgeraden von l zu P liegen).

Da σ das Lot l auf sich abbildet (und E auf F) und da σ winkeltreu ist, ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Senkrechten zu l in F :

$$\sigma h'' = g \quad \text{und} \quad \sigma Q \in g.$$

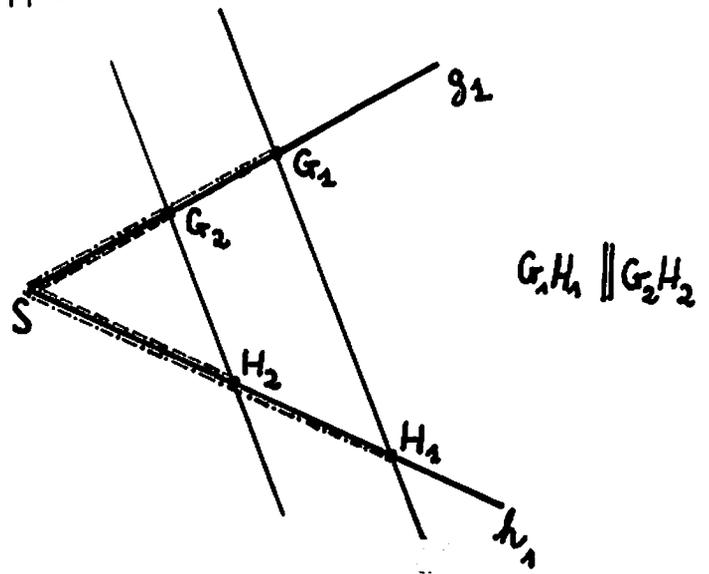
Andererseits ist nach Definition der Streckung: $\sigma Q \in h'$.

Damit ist aber $\sigma Q \in h' \cap g$. Dies steht im Widerspruch zur Parallelität von h' und g , d.h. zu $h' \cap g = \emptyset$.

(Denn der Fall $h' = g$ scheidet wegen $P \notin g$ aus).

Satz 4.13 (1.STRAHLENSATZ):

Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Scheitel S von Parallelen außerhalb von S geschnitten, so verhalten sich die Maße der vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf dem einen Strahl wie die Maße der entsprechenden Strecken auf dem anderen Strahl.



Beweis:

Voraussetzung: $G_1H_1 \parallel G_2H_2$ und $S \notin G_iH_i$ ($i=1,2$).

S wird zum Zentrum einer Streckung σ mit $k > 0$ gewählt, die G_1 auf G_2 abbildet: $d(S, G_2) = k \cdot d(S, G_1)$.

Behauptung: Es ist $d(S, H_2) = k \cdot d(S, H_1)$.

Dazu ist $\sigma H_1 = H_2$ nachzuweisen:

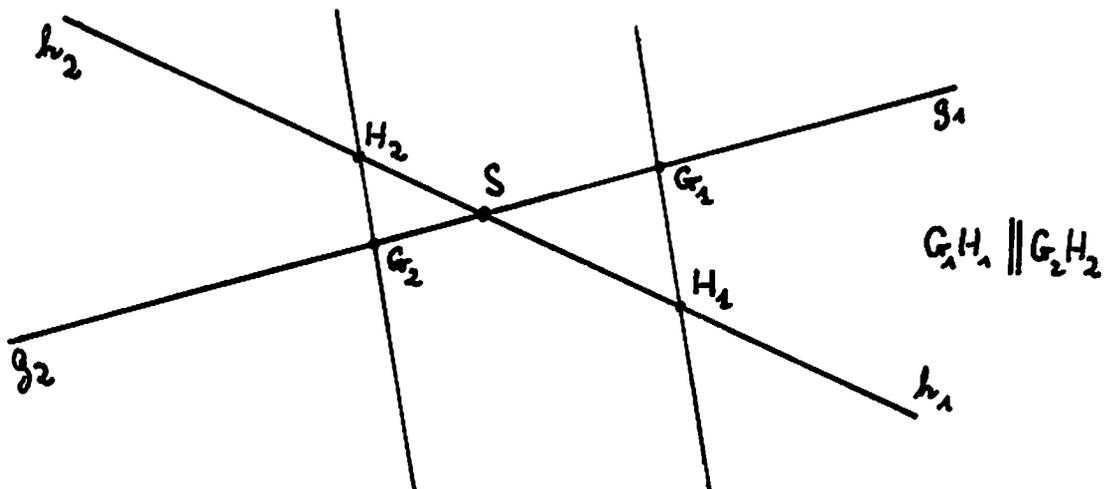
$\sigma(G_1H_1)$ ist eine Parallele zu G_1H_1 durch G_2 und fällt infolge dessen mit G_2H_2 zusammen (Satz 4.12). Speziell gilt $\sigma H_1 \in G_2H_2$. Wegen $k > 0$ ist ferner $\sigma H_1 \in h_1$.

Daraus folgt: $\sigma H_1 \in h_1 \cap G_2H_2 = \{H_2\}$. Also: $\sigma H_1 = H_2$.

Zusammenfassung:

$$k = \frac{d(S, H_2)}{d(S, H_1)} = \frac{d(S, G_2)}{d(S, G_1)}$$

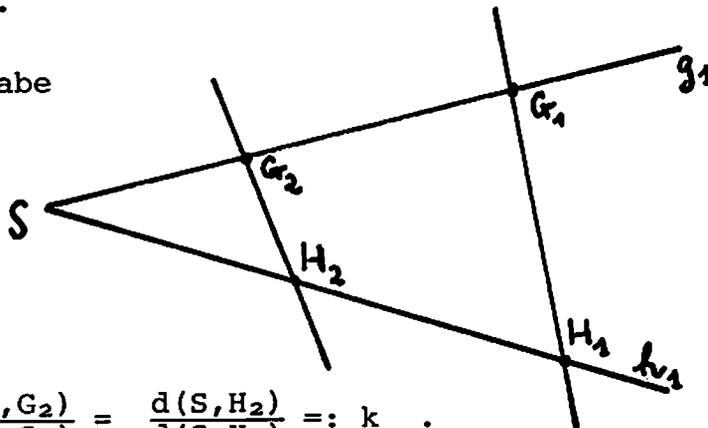
Bemerkung: Der 1.Strahlensatz gilt auch, wenn die 4 Schnittpunkte mit den beiden Parallelen auf 4 verschiedenen Strahlen von zwei sich schneidenden Geraden liegen (s.Abb.unten). In diesem Fall ist der Streckfaktor von σ negativ: $k < 0$.



Satz 4.14 (Umkehrung des 1. Strahlensatzes):

Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Scheitel S von zwei Geraden nicht in S geschnitten und verhalten sich die Maße der vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf dem einen Strahl wie die Maße der entsprechenden Strecken auf dem anderen Strahl, dann sind die beiden Geraden zueinander parallel.

Beweis: Aufgabe



Ansatz: $\frac{d(S, G_2)}{d(S, G_1)} = \frac{d(S, H_2)}{d(S, H_1)} =: k$.

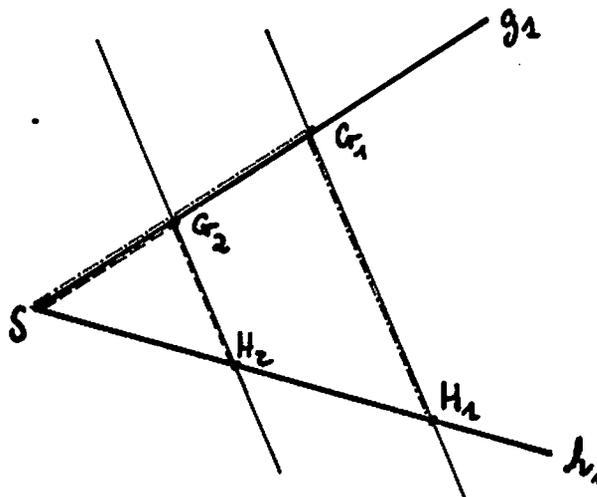
Satz 4.15: (2. STRAHLENSATZ)

Werden zwei Strahlen g_1 und h_1 mit gemeinsamem Scheitel S von zwei Parallelen außerhalb S geschnitten, so verhalten sich die Längen der vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf einem Strahl wie die Längen der entsprechenden Strecken auf den Parallelen.

Beweis:

Zu zeigen ist: $\frac{d(S, G_2)}{d(S, G_1)} = \frac{d(G_2, H_2)}{d(G_1, H_1)}$.

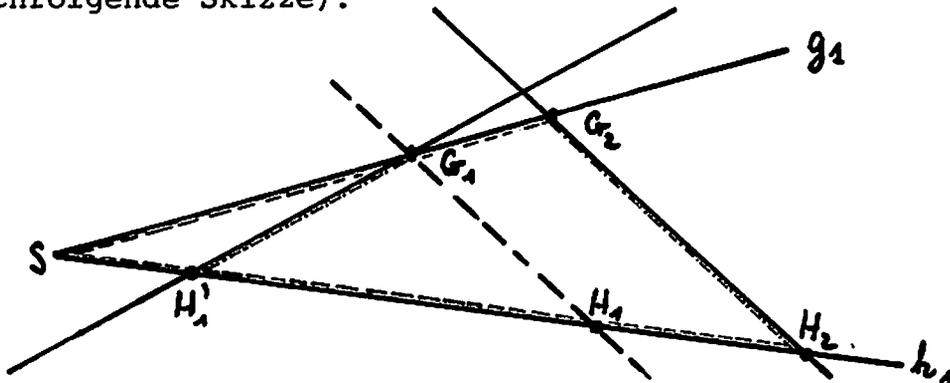
1. Es sei $k > 0$ der Streckfaktor zur Streckung σ mit dem Zentrum S und $\sigma G_1 = G_2$.
2. Die Streckung σ führt H_1 in einen Punkt auf h_1 und zugleich in einen Punkt auf der Parallelen zu $H_1 G_1$ durch G_2 über; das ist aber H_2 (Beweis des 1. Strahlensatzes).
3. Es ist demnach $\overline{\sigma G_1 H_1} = \overline{G_2 H_2}$ und $\overline{\sigma S G_1} = \overline{S G_2}$, da S Fixpunkt ist.



4. Da Streckungen Ähnlichkeitsabbildungen mit dem Längenverhältnis $|k|$ sind, ergibt sich die Behauptung:

$$|k| = \frac{d(G_2, H_2)}{d(G_1, H_1)} = \frac{d(S, G_2)}{d(S, G_1)}$$

Bemerkung: Der 2. Strahlensatz ist nicht umkehrbar (siehe nachfolgende Skizze).



Zwar gilt: $\frac{d(S, G_2)}{d(S, G_1)} = \frac{d(G_2, H_2)}{d(G_1, H_1)}$, aber nicht $G_1H_1 \parallel G_2H_2$!

Aufgabe 4.2: Zwei Halbgeraden g_1 und h_1 mit gemeinsamem Anfangspunkt S werden von Parallelen in G_1 und H_1 bzw. G_2 und H_2 geschnitten. Es sei $S \notin G_1H_1$ und $S \notin G_2H_2$. Man beweise:

Aus
$$\frac{d(S, G_2)}{d(S, G_1)} = \frac{d(S, H_2)}{d(S, H_1)} \quad (0)$$

folgt
$$\frac{d(S, G_2)}{d(G_1, G_2)} = \frac{d(S, H_2)}{d(H_1, H_2)} \quad (1) \quad \text{und} \quad \frac{d(G_1, S)}{d(G_1, G_2)} = \frac{d(H_1, S)}{d(H_1, H_2)} \quad (2)$$

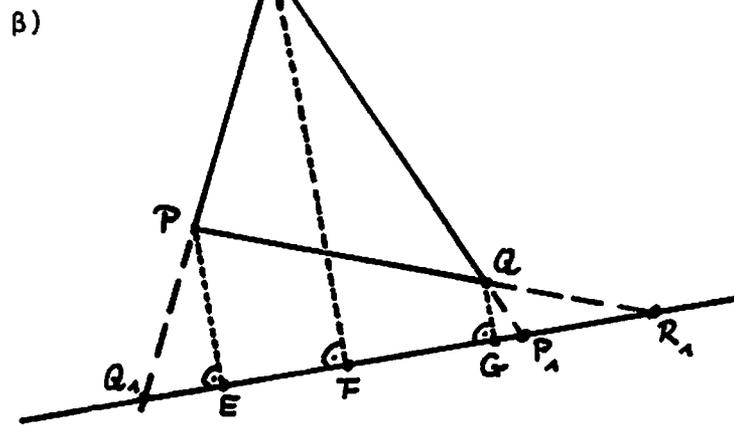
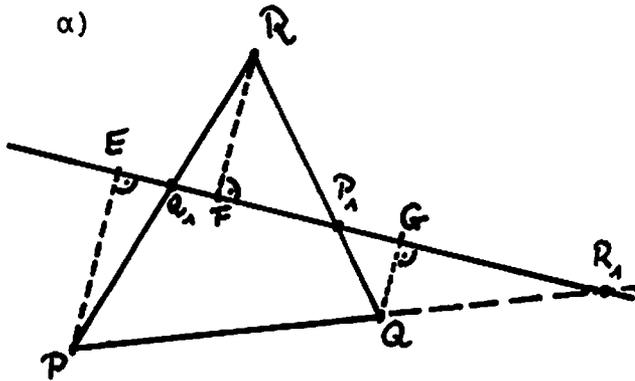
Satz 4.16 (SATZ VON MENELAOS*):

Eine Gerade schneide die drei Seiten eines Dreiecks echt innen oder außen. Bildet man zyklisch die Quotienten der Längen der Strecken, in die die Seiten zerlegt werden und multipliziert man die drei Quotienten, so ist der Wert 1.

Beweis:

Von den Ecken des Dreiecks werden Lote auf die schneidende Gerade gefällt. Seien die entsprechenden Lotfußpunkte mit E, F und G bezeichnet (siehe Skizze auf S.4.14 oben)

*) um 100 v.Chr.



Dann gilt mit dem zweiten Strahlensatz (sowohl für Fall α als auch für Fall β):

$$\frac{d(P, R_1)}{d(R_1, Q)} = \frac{d(P, E)}{d(Q, G)} \quad (1) \quad , \quad \frac{d(Q, P_1)}{d(P_1, R)} = \frac{d(Q, G)}{d(R, F)} \quad (2) \quad \text{und}$$

$$\frac{d(R, Q_1)}{d(Q_1, P)} = \frac{d(R, F)}{d(P, E)} \quad (3) \quad .$$

Multipliziert man die linken und die rechten Seiten von (1) bis (3) miteinander, so folgt:

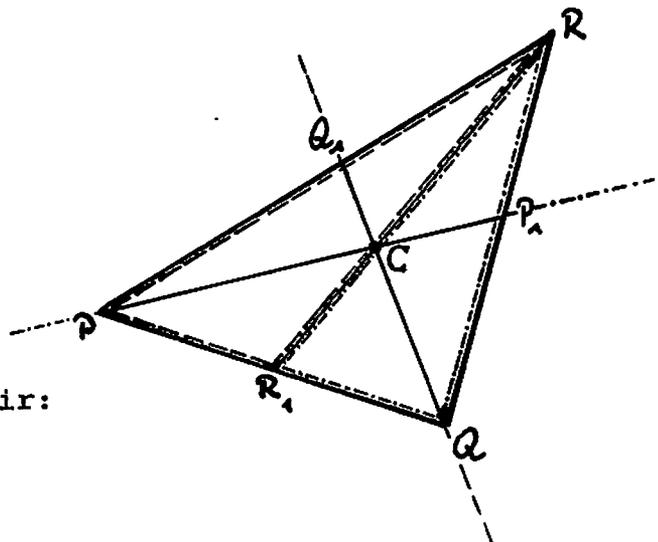
$$\frac{d(P, R_1)}{d(R_1, Q)} \cdot \frac{d(Q, P_1)}{d(P_1, R)} \cdot \frac{d(R, Q_1)}{d(Q_1, P)} = 1 \quad .$$

Satz 4.17 (SATZ VON CEVA*):

Gegeben sei durch jede Ecke eines Dreiecks eine Gerade, die die gegenüberliegende Seite echt innen oder außen schneidet. Gehen die drei Geraden durch einen gemeinsamen Schnittpunkt und bildet man zyklisch die Quotienten der Längen der Strecken, in die die Seiten zerlegt werden, so hat das Produkt der drei Quotienten den Wert 1.

Beweis:

Wir wenden zweimal den Satz von MENELAOS an, und zwar auf das Teildreieck $\{P, R, R_1\}$ mit der schneidenden Geraden QQ_1 und auf das Teildreieck $\{R_1, R, Q\}$ mit der schneidenden Geraden PP_1 . Dann erhalten wir:



*) 1647 - 1734

$$\frac{d(R, Q_1)}{d(Q_1, P)} \cdot \frac{d(P, Q)}{d(Q, R_1)} \cdot \frac{d(R_1, C)}{d(C, R)} = 1 \quad \text{und}$$

$$\frac{d(R, C)}{d(C, R_1)} \cdot \frac{d(R_1, P)}{d(P, Q)} \cdot \frac{d(Q, P_1)}{d(P_1, R)} = 1 \quad .$$

Durch Multiplikation der jeweils rechten und linken Seiten ergibt sich sofort:

$$\frac{d(R, Q_1)}{d(Q_1, P)} \cdot \frac{d(P, R_1)}{d(R_1, Q)} \cdot \frac{d(Q, P_1)}{d(P_1, R)} = 1 .$$

Bemerkung: Bei unserem Beweis des Satzes von CEVA setzten wir stillschweigend voraus, daß der Cevapunkt im Inneren des Dreiecks liegt.

Aufgabe 4.3: Man führe den Beweis für den Satz von CEVA unter der Voraussetzung, daß der Cevapunkt außerhalb des Dreiecks liegt.

Satz 4.18 (Umkehrung des Satzes von CEVA):

Gegeben seien durch jede Ecke eines Dreiecks eine Gerade, die die gegenüberliegende Seite echt innen schneidet^{*}). Bildet man zyklisch die Quotienten der Längen der Strecken, in die die Seiten zerlegt werden und hat das Produkt der drei Quotienten den Wert 1, so gehen die drei schneidenden Geraden durch einen gemeinsamen Schnittpunkt.

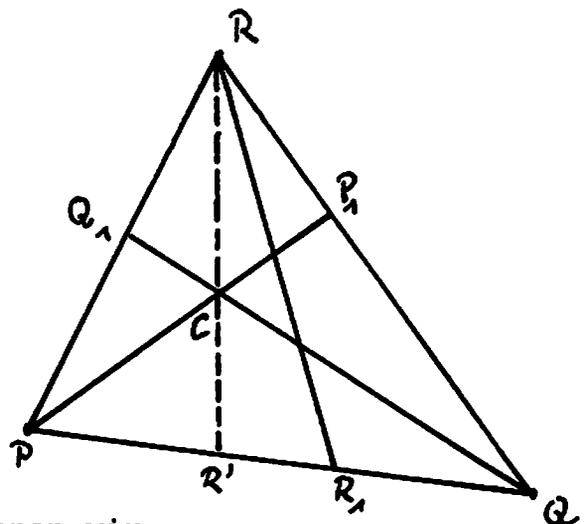
Beweis:

Die drei Geraden seien PP_1 , QQ_1 und RR_1 .

Nach Voraussetzung gilt:

$$\frac{d(P, R_1)}{d(R_1, Q)} \cdot \frac{d(Q, P_1)}{d(P_1, R)} \cdot \frac{d(R, Q_1)}{d(Q_1, P)} = 1$$

Zwei der Geraden - sagen wir PP_1 und QQ_1 - schneiden sich sicher in einem Punkt C im Inneren des Dreiecks (warum?). Geht die dritte Gerade RR_1 nicht durch C , dann können wir durch R und C eine Gerade legen, die \overline{PQ} in einem weiteren



^{*}) oder zwei Seiten werden außen und die dritte echt innen geschnitten.

Punkt R' innen trifft. Nach dem Satz von CEVA gilt:

$$\frac{d(P, R')}{d(R', Q)} \cdot \frac{d(Q, P_1)}{d(P_1, R)} \cdot \frac{d(R, Q_1)}{d(Q_1, P)} = 1$$

Ein Vergleich mit der Voraussetzung liefert:

$$\frac{d(P, R')}{d(R', Q)} = \frac{d(P, R_1)}{d(R_1, Q)}$$

Das ist aber für $\{R', R_1\} \subset \overline{PQ}$ unmöglich, wenn man $R' \neq R_1$ voraussetzt. Demnach ist $RR_1 = RR'$ und somit $C \in RR_1$.

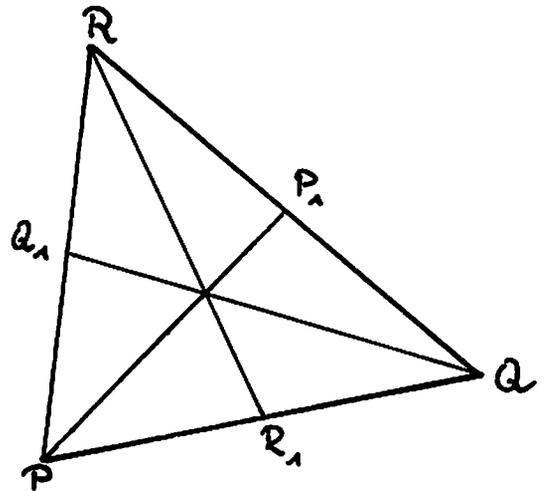
Definition 4.3:

Jede Gerade durch eine Ecke und durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite eines Dreiecks heißt SEITENHALBIERENDE.

Satz 4.19:

In jedem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt.

Beweis: Aufgabe

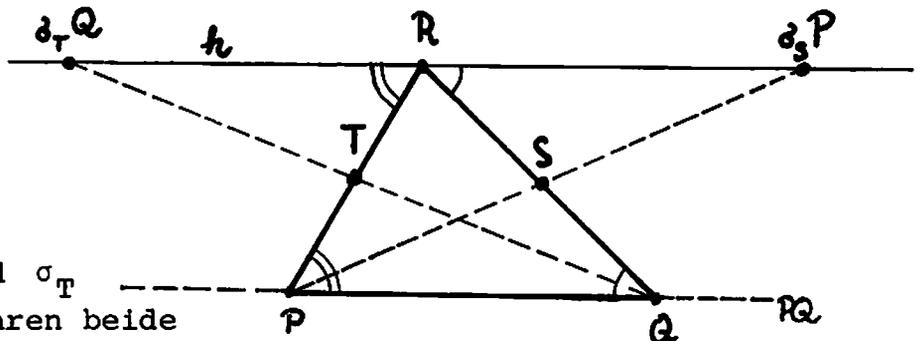


Satz 4.20:

In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkelmaße 180.

Beweis:

T halbiere gemäß nebenstehender Abb. die Strecke \overline{PR} und S halbiere \overline{RQ} . Die Punktspiegelungen σ_S mit dem Zentrum S und σ_T mit dem Zentrum T führen beide



als Streckungen mit dem Streckfaktor $k = -1$ die Gerade PQ in die nach Satz 4.12 eindeutig bestimmte Parallele h durch R über, und es gilt: $\sigma_S Q = \sigma_T P = R$, $\sigma_S R = Q$, $\sigma_T R = P$.
Wegen der Winkelfeld- und Winkelmaßtreue der Streckungen

$$\left. \begin{aligned} \text{ist: } \omega(\sphericalangle RQP) &= \omega(\sphericalangle \sigma_S R \sigma_S Q \sigma_S P) = \omega(\sphericalangle QR \sigma_S P) \\ \omega(\sphericalangle QPR) &= \omega(\sphericalangle \sigma_T Q \sigma_T P \sigma_T R) = \omega(\sphericalangle \sigma_T Q RP) \end{aligned} \right\} (*)$$

Wegen $\{\sigma_T Q, \sigma_S P\} \subset h$ und $R \in \overline{\sigma_T Q \sigma_S P}$ gilt:

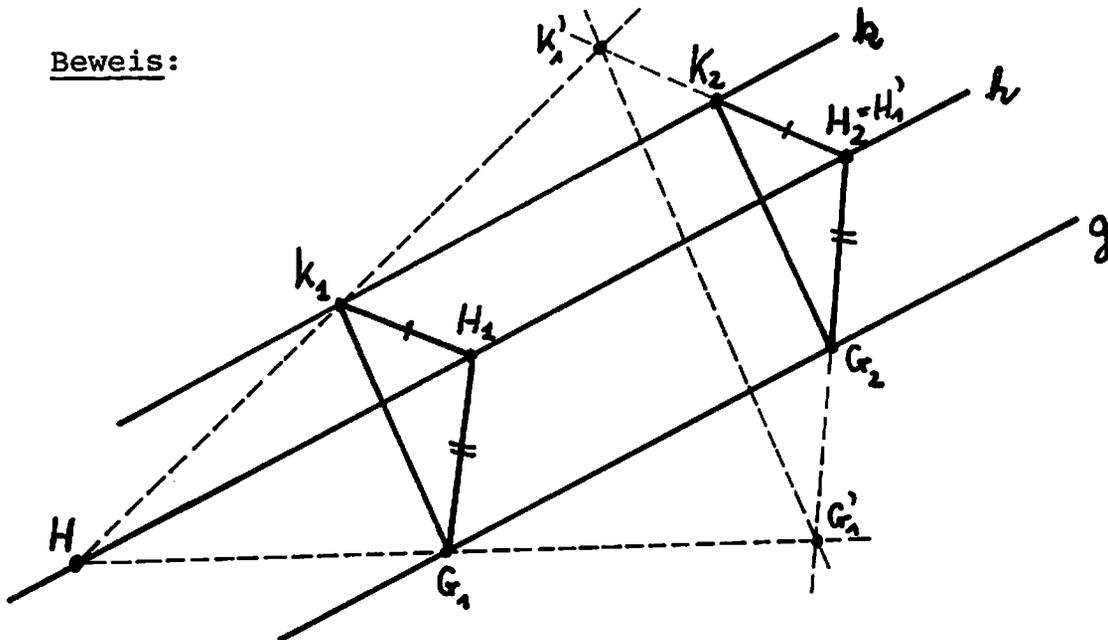
$$\begin{aligned} 180 &= \omega(\sphericalangle \sigma_T Q R \sigma_S P) \\ &= \omega(\sphericalangle \sigma_T Q RP) + \omega(\sphericalangle PRQ) + \omega(\sphericalangle QR \sigma_S P) \\ &(\overline{\sphericalangle}) \omega(\sphericalangle QRP) + \omega(\sphericalangle PRQ) + \omega(\sphericalangle RQP), \end{aligned}$$

das ist aber die Summe der Winkelmaße der Innenwinkelfelder im Dreieck.

Satz 4.21 (Kleiner Satz von DESARGUES^{*}):

Auf drei paarweise verschiedenen parallelen Geraden liegen die Ecken von zwei Dreiecken. Sind zwei Paare entsprechender Seiten parallel, so auch die dritten Seiten.

Beweis:



Voraussetzung: $k \parallel h \parallel g$, $K_1 H_1 \parallel K_2 H_2$, $G_1 H_1 \parallel G_2 H_2$

Behauptung: $K_1 G_1 \parallel K_2 G_2$

Durchführung:

- (a) Wir wählen eine Streckung σ mit dem Zentrum H ($H \notin \overline{H_1 H_2}$), die H_1 in H_2 überführt: $\sigma H_1 = H_2$.

^{*}) 1591 - 1661

Dabei geht H_1G_1 in die parallele Gerade H_2G_2 und H_1K_1 in die parallele Gerade H_2K_2 über. Auf den Parallelen liegen die Bilder G_1' von G_1 und K_1' von K_1 .

- (b) Die Gerade $G_1'K_1'$ ist das Bild der Geraden G_1K_1 unter der Streckung σ . Nach dem Satz 4.10 gilt daher
- $$G_1'K_1' \parallel G_1K_1 .$$
- (c) Da Geraden durch das Streckzentrum H auf sich abgebildet werden, liegt das Bild K_1' von K_1 auf HK_1 und das Bild G_1' von G_1 auf HG_1 . Es gilt also mit (a): $\{K_1'\} = HK_1 \cap H_2K_2$ und $\{G_1'\} = HG_1 \cap H_2G_2$.
- (d) Durch Anwendungen des 1. Strahlensatzes (Satz 4.13) ergibt sich nun mittels Satz 4.14: $G_1'K_1' \parallel G_2K_2$: Bezogen auf den Scheitel K_1' und die Parallelen k und h besagt der 1. Strahlensatz:

$$\frac{d(K_1', K_1)}{d(K_1', H)} = \frac{d(K_1', K_2)}{d(K_1', H_2)} \quad (1)$$

Bezogen auf den Scheitel G_1' und die Parallelen g und h besagt der 1. Strahlensatz:

$$\frac{d(G_1', G_1)}{d(G_1', H)} = \frac{d(G_1', G_2)}{d(G_1', H_2)} \quad (2)$$

Aus (1) folgt:

$$1 - \frac{d(K_1', K_1)}{d(K_1', H)} = 1 - \frac{d(K_1', K_2)}{d(K_1', H_2)}$$

und damit:

$$\frac{d(H, K_1)}{d(H, K_1')} = \frac{d(H_2, K_2)}{d(H_2, K_1')} \quad (3)$$

Aus (2) folgt:

$$1 - \frac{d(G_1', G_1)}{d(G_1', H)} = 1 - \frac{d(G_1', G_2)}{d(G_1', H_2)}$$

und damit:

$$\frac{d(H, G_1)}{d(H, G_1')} = \frac{d(H_2, G_2)}{d(H_2, G_1')} \quad (4)$$

Da die Streckung σ den Punkt K_1 in K_1' und den Punkt G_1 in G_1' überführt, ist:

$$\frac{d(H, G_1)}{d(H, G_1')} = \frac{d(H, K_1)}{d(H, K_1')}$$

Damit ergibt sich über (3) und (4) :

$$\frac{d(H_2, G_2)}{d(H_2, G_1')} = \frac{d(H_2, K_2)}{d(H_2, K_1')}$$

Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes (Satz 4.14) erhalten wir somit: $G_1'K_1' \parallel G_2K_2$.

Zusammen mit (b) und der Transitivität von \parallel folgt zuletzt:

$$G_1K_1 \parallel G_2K_2 .$$

Aufgabe 4.4: Man beweise die Transitivität der Parallel-Relation \parallel in einer Menge von Geraden.

Satz 4.22 (Kleiner Satz von PAPPUS^{*}):

Liegen die Ecken eines Sechsecks¹⁾ abwechselnd auf zwei zueinander parallelen Geraden und gibt es zwei Paare einander gegenüberliegender paralleler Seiten, so sind auch die Seiten des 3.Paares zueinander parallel.

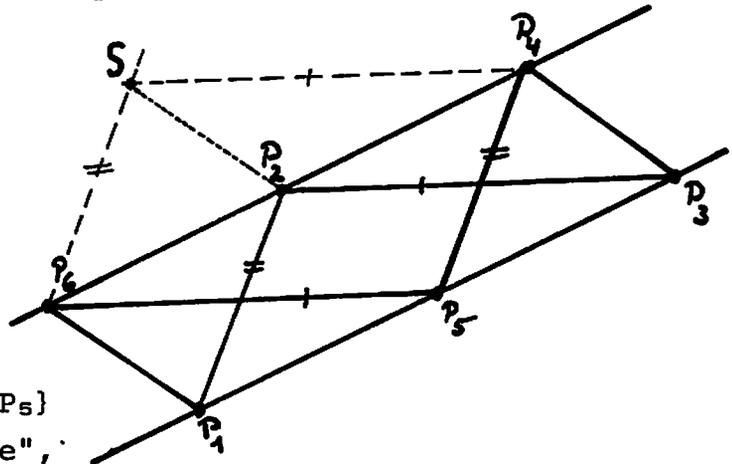
Beweis:

Zu jedem nach Voraussetzung parallelen Paar von Seiten ($P_1P_2 \parallel P_4P_5$ und $P_2P_3 \parallel P_5P_6$) wird eine dritte Parallele (durch P_6 bzw. P_4) gewählt.

Dann sind die Dreiecke $\{P_3, P_4, P_5\}$ und $\{P_2, S, P_6\}$ in "Desargueslage", also ist: $P_3P_4 \parallel P_2S$.

Auch die Dreiecke $\{S, P_2, P_4\}$ und $\{P_6, P_1, P_5\}$ befinden sich in "Desargueslage"; hier folgt: $P_2S \parallel P_1P_6$.

Die Transitivität von \parallel führt zur Behauptung: $P_3P_4 \parallel P_1P_6$.



Definition 4.4:

Sind P, Q, R Punkte auf einer Geraden, so heißt die Zahl $\frac{d(P,R)}{d(R,Q)}$ das TEILVERHÄLTNIS der drei Punkte (in dieser Reihenfolge), und die Strecke \overline{PQ} heißt durch R in diesem Verhältnis geteilt.

Bemerkung 4.1:

Der Teilpunkt R muß nicht auf der Strecke \overline{PQ} liegen (äußere Teilung).

Satz 4.23:

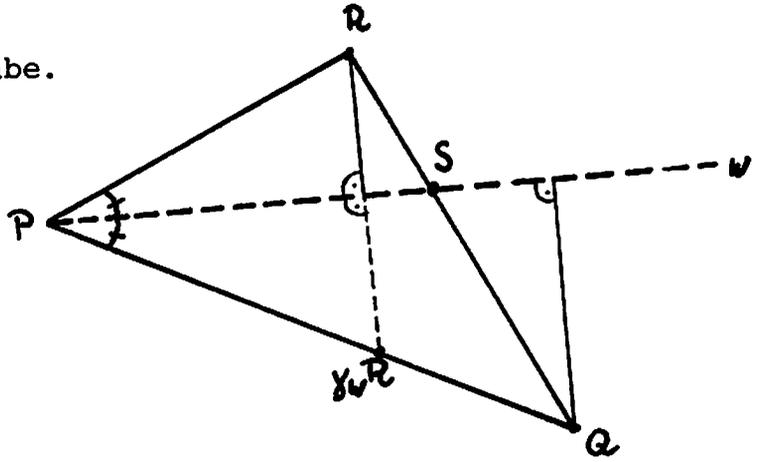
Die Halbierende eines Innenwinkelfeldes eines Dreiecks teilt die dem Scheitel gegenüberliegende Seite im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten.

^{*}) um 300 n.Chr. in Alexandria

¹⁾ das ist ein geschlossener Sechskantenzug

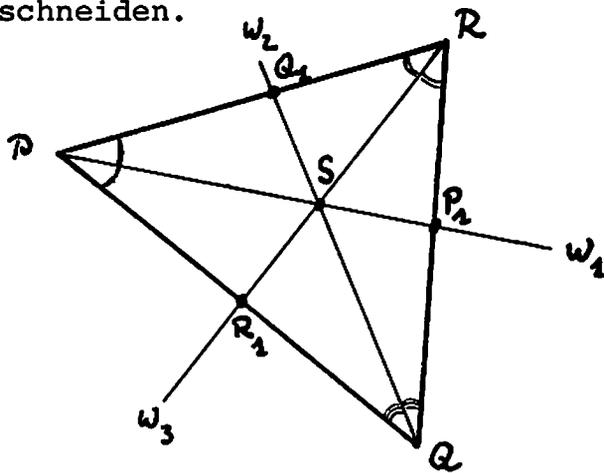
Beweis zu Satz 4.23: Aufgabe.

Anleitung: Man fälle von den Endpunkten der Seite das Lot auf die Winkelhalbierende, spiegele an der Winkelhalbierenden und wende zweimal einen Strahlensatz an.



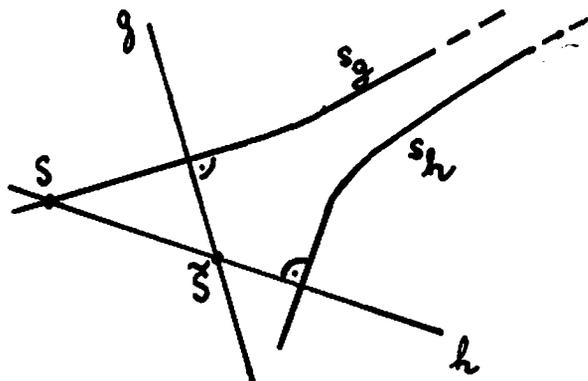
Aufgabe 4.5: Man zeige unter Verwendung von Satz 4.23, daß die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden.

Skizze:



Aufgabe 4.6: Man beweise: Wenn sich zwei Geraden g und h schneiden, dann schneiden sich auch zwei beliebige Senkrechte s_g und s_h zu ihnen.

Hinweis: Man führe einen indirekten Beweis und mache hierbei die Fallunterscheidung $s_g = s_h$ und $s_g \cap s_h = \emptyset$.

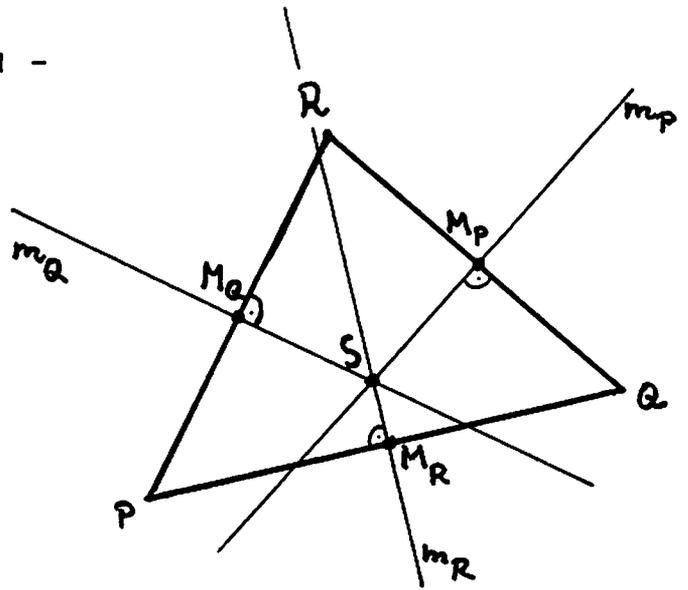


Satz 4.24:

In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt.

Beweis: Aufgabe

Anleitung: Man verwende Aufgabe 4.8 und die Resultate der Aufgaben 3.8 und 3.9 .

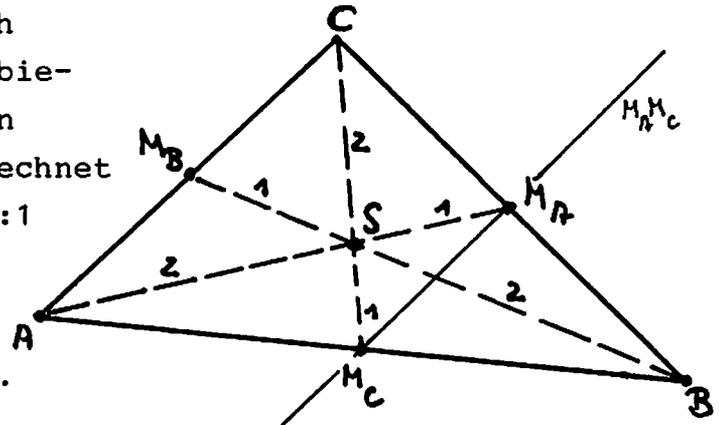


Aufgabe 4.7: Man zeige:

Die drei Seitenhalbierendenabschnitte im Inneren eines Dreiecks $\{A,B,C\}$ werden durch den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden so geteilt, daß sich von den Ecken des Dreiecks aus gerechnet die Längen der Strecken wie 2:1 verhalten.

Es ist also zu zeigen:

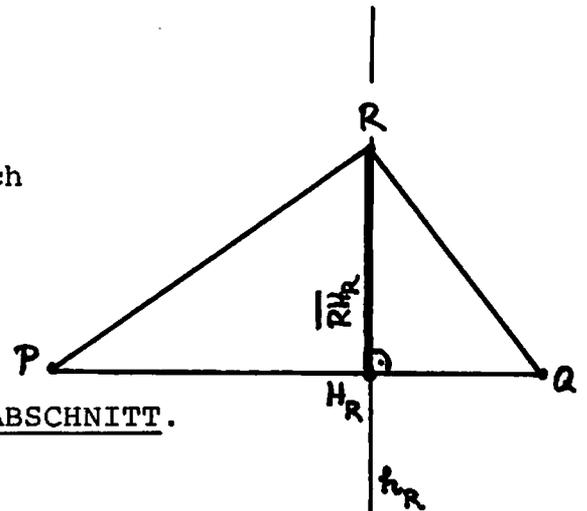
$$\frac{d(A,S)}{d(S,M_A)} = \frac{d(B,S)}{d(S,M_B)} = \frac{d(C,S)}{d(S,M_C)} = \frac{2}{1} .$$



Hinweis: Man verbinde zwei der Seitenmittelpunkte durch eine Gerade und wende Strahlensätze an.

Definition 4.5:

In jedem Dreieck heißt das Lot durch eine Ecke auf die durch die beiden anderen Ecken bestimmte Gerade eine HÖHE. Die durch die genannte Ecke und den Lotfußpunkt bestimmte Strecke nennen wir HÖHENABSCHNITT.



Satz 4.25:

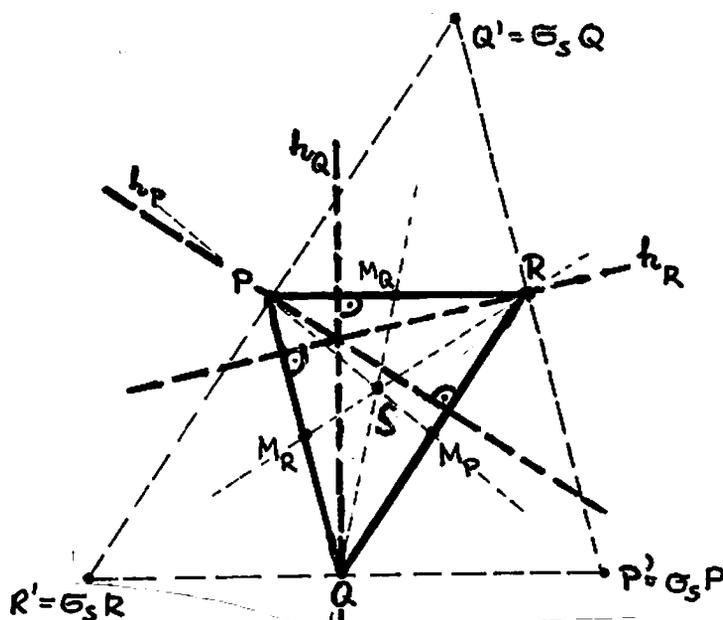
In jedem Dreieck schneiden sich die drei Höhen in einem Punkt.

Beweis: Aufgabe

Anl.: siehe nächste Seite !

Anleitung zum Beweis von Satz 4.25:

Sei $\{P, Q, R\}$ das gegebene Dreieck und S der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden PM_P, QM_Q, RM_R . Dann bilde man das Dreieck $\{P', Q', R'\}$ durch die Streckung σ_S mit dem Streckzentrum S und dem Streckfaktor $k = -2$ ab und zeige unter Verwendung von Aufgabe 4.9: Im Bilddreieck $\{P', Q', R'\}$ sind die drei Höhen h_P, h_Q und h_R des Ausgangsdreiecks gerade die Mittelsenkrechten, d.h. $h_P = m_{P'}$, $h_Q = m_{Q'}$, $h_R = m_{R'}$. Schließlich wende man Satz 4.24 an.



Wir beschließen das Kapitel mit einigen speziellen Aussagen über Teilverhältnisse.

Definition 4.6:

P, Q, T_1, T_2 seien vier Punkte auf derselben Geraden mit $P \neq T_2 \neq Q \neq T_1$. Dann heißt

$$DV(P, Q, T_1, T_2) := \frac{d(P, T_1)}{d(T_1, Q)} : \frac{d(P, T_2)}{d(T_2, Q)}$$

das DOPPELVERHÄLTNISS der vier Punkte.

Im Falle $DV(P, Q, T_1, T_2) = 1$ sagt man, die Punkte seien in HARMONISCHER LAGE.

Bemerkung 4.2:

In der Literatur wird die harmonische Lage in der Regel durch -1 und nicht, wie hier, durch $+1$ gekennzeichnet. Man erreicht dies, indem man das Teilverhältnis mittels der Koordinatenfunktion χ (vgl. § 1) folgendermaßen definiert: $TV(P, Q, T) := \frac{\chi(T) - \chi(P)}{\chi(Q) - \chi(T)}$.

Für $P \prec T \prec Q$ ist diese Zahl gleich $\frac{d(P, T)}{d(T, Q)}$, andernfalls gleich $-\frac{d(P, T)}{d(T, Q)}$. Wir verzichten aus Gründen der Vereinfachung auf diese Feinheit.

Aufgabe 4.8:

Werden P und Q durch T_1, T_2 harmonisch geteilt, so auch T_1, T_2 durch P und Q .

Bemerkung 4.3:

Projiziert man eine Gerade zentral auf eine andere, so spricht man von einer PROJEKTIVEN ABBILDUNG (im engeren Sinne).

Satz 4.26:

Doppelverhältnisse sind projektiv invariant.

Beweis: Aufgabe.

Hinweis: Man betrachte die nebenstehende Skizze und begründe:

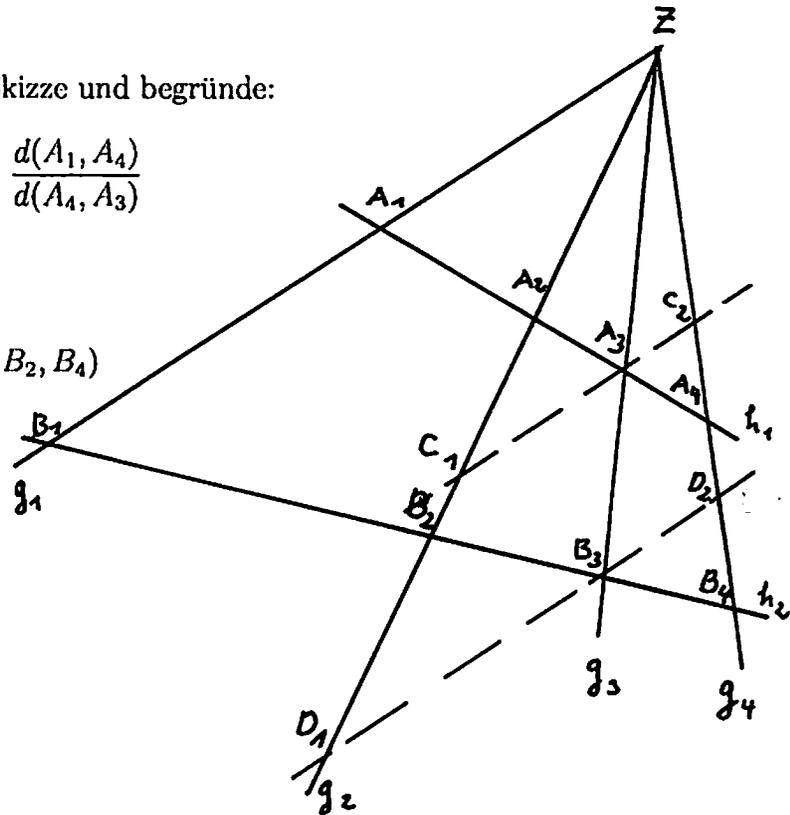
$$(a) \quad DV(A_1, A_3, A_2, A_4) := \frac{d(A_1, A_2)}{d(A_2, A_3)} : \frac{d(A_1, A_4)}{d(A_4, A_3)}$$

$$= \frac{d(A_3, C_2)}{d(A_3, C_1)}$$

$$(b) \quad DV(A_1, A_3, A_2, A_4) = DV(B_1, B_3, B_2, B_4)$$

Definition 4.7:

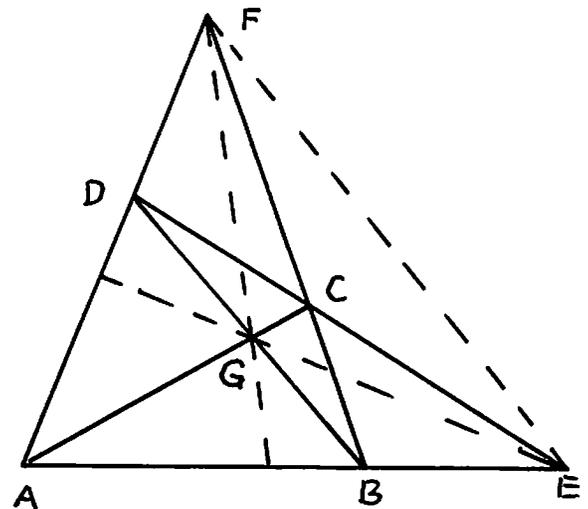
Vier von einem Zentrum ausgehende Strahlen heißen HARMONISCH, wenn sie von einer Geraden in einem harmonischen Punktquadrupel geschnitten werden.



Wir untersuchen nun ein sogenanntes VOLLSTÄNDIGES VIERECK $\{A, B, C, D\}$, d.h. ein Viereck mit seinen 6 paarweise einander „gegenüberliegenden“ Verbindungsgeraden $AC, BD; AB, DC; AD, BC$, den durch diese bestimmten „Diagonalschnittpunkten“ E, F, G und den „Diagonalen“ EF, FG, GE . Hier gilt folgende Aussage.

Satz 4.27 (vom vollständigen Viereck):

Von jedem Diagonalenpunkt eines vollständigen Vierecks gehen vier harmonische Strahlen aus, die durch ein paar von Gegenseiten und zwei Diagonalen festgelegt sind.



Aufgabe 4.9:

Auf einer Geraden liegen drei Punkte P, Q, R mit $P < Q < R$, wobei Q nicht der Mittelpunkt von \overline{PR} sein soll. Konstruieren Sie nur mit dem Lineal allein den vierten harmonischen Punkt S , der mit Q ein Paar bildet.

§5 Kongruenzabbildungen und Kongruenzsätze

Wir erinnern uns (Def.3.1 auf S.3.1):

Eine Bijektion $\beta: E \rightarrow E$ heißt KONGRUENZABBILDUNG, wenn sie geraden- und maßtreu ist.

Kongruenzabbildungen sind strecken-, halbgeraden-, halbebenen- und winkelfeldtreu (siehe Beweis zu Satz 3.1, S.3.2)

Das Spiegelungsaxiom (VIII) garantiert, daß es zu jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ genau eine ACHSENSPIEGELUNG γ_g gibt, d.h. eine Kongruenzabbildung, für die g Fixpunktgerade ist und die die beiden Halbebenen H_1 und H_2 von g aufeinander abbildet.

Wir wollen zunächst die Gesamtheit und dann das Wesen der Kongruenzabbildungen analysieren:

Wir bemerken zunächst, daß die Menge aller Bijektionen von E auf E bezüglich der Verkettung " \circ " eine Gruppe darstellt, die PERMUTATIONSGRUPPE von E . Die Identität id_E ist das neutrale Element der Gruppe.

Satz 5.1:

Die Menge \mathcal{B} der Kongruenzabbildungen von E auf E stellt mit der Verkettung " \circ " eine Gruppe (\mathcal{B}, \circ) dar.

Beweis:

Jede Kongruenzabbildung ist eine Bijektion; daher ist \mathcal{B} eine Teilmenge der Menge aller Bijektionen, die bezüglich \circ eine Gruppe bildet. Nach einem Untergruppenkriterium (vergleiche dazu Aufgabe 5.1 auf Seite 5.2) ist deshalb (\mathcal{B}, \circ) eine Gruppe, wenn gilt:

(1) $\begin{matrix} \wedge \\ \beta_1 \in \mathcal{B} \quad \beta_2 \in \mathcal{B} \end{matrix} \beta_2 \circ \beta_1 \in \mathcal{B} \quad ,$

(2) $\begin{matrix} \wedge \\ \beta \in \mathcal{B} \end{matrix} \beta^{-1} \in \mathcal{B} \quad .$

(1) wurde schon in Aufgabe 3.2, Seite 3.3, nachgewiesen und bereitet keine Schwierigkeiten.

(2) wurde bezüglich der Geraden- und Längentreue schon in Aufgabe 3.1, Seite 3.1 geprüft.

Als geraden- und längentreue Bijektion ist β^{-1} auch winkelfeldtreu (siehe Satz 3.1, Seite 3.2). Dann ist aber β^{-1} auch winkelmaßtreu:

$$\omega(\beta^{-1}W) = \omega(\beta\beta^{-1}W) = \omega(\text{id}W) = \omega(W) \quad ,$$

denn β ist nach Voraussetzung winkelmaßtreu.

Aufgabe 5.1: Ist (P, \circ) eine Gruppe und gilt $\emptyset \neq B \subset P$ und ist

- (1) $\bigwedge_{\beta_1 \in B} \bigwedge_{\beta_2 \in B} \beta_2 \circ \beta_1 \in B \quad ,$
 (2) $\bigwedge_{\beta \in B} [\beta \in B \Rightarrow \beta^{-1} \in B] \quad ,$

dann ist (B, \circ) eine Untergruppe von (P, \circ) .

Bemerkung: Die Gruppe der Kongruenzabbildungen von E auf E heißt auch GRUPPE DER BEWEGUNGEN in E .

Satz 5.2:

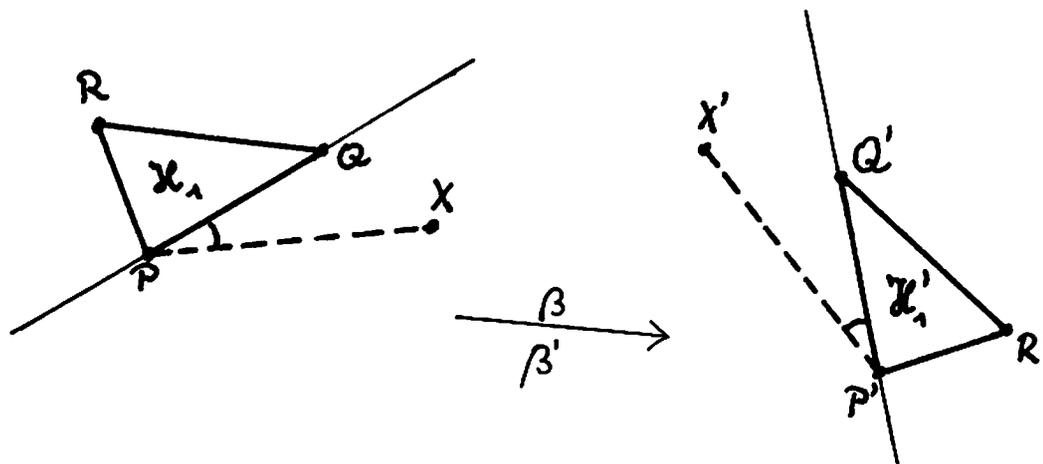
Jede Kongruenzabbildung ist durch Vorgabe von drei nicht kollinearen Punkten und deren Bildern eindeutig bestimmt.

Beweis:

β, β' seien Kongruenzabbildungen, die die drei nicht kollinearen Punkte P, Q, R in dieser Reihenfolge auf P', Q', R' abbilden.

Zu zeigen ist: An jeder Stelle $X \in E$ stimmt β mit β' überein:

$$\bigwedge_{X \in E} \beta'X = \beta X \quad .$$



1. Sei $X \in E$ gegeben.

Wir wählen eine der drei Geraden PQ, QR, RP , auf der X nicht liegt. O.B.d.A. sei $X \notin PQ$ und X in derjenigen Halbebene zu PQ gelegen, der R nicht angehört (s. Abb.)

2. β und β' bilden PQ auf $P'Q'$ ab (Geradentreue) und X in diejenige Halbebene zu $P'Q'$, in der R' nicht liegt (Halbebenentreue). Dabei geht \overline{PQ} in $\overline{P'Q'}$ über (Halbgeradentreue).

3. Das Bild des Winkelfeldes $\sphericalangle QPX$ ist $\sphericalangle Q'P'\beta X$ bzw. $\sphericalangle Q'P'\beta'X$, und es gilt: $\omega(\sphericalangle Q'P'\beta X) = \omega(\sphericalangle Q'P'\beta'X)$ (Winkelmaßtreue).

Nach dem Winkelmaßaxiom (VII) - eindeutige Abtragbarkeit des Winkelfeldes - gibt es zu gegebener Halbgeraden und zugehöriger Halbebene zu jedem Maß genau ein Winkelfeld; demnach sind die Halbgeraden $\overline{P'\beta X}$ und $\overline{P'\beta'X}$ gleich.

4. Wegen der Längentreue von β und β' ist

$$d(P', \beta'X) = d(P', \beta X)$$

und daher wegen der auf einem gegebenen Strahl vom Anfangspunkt aus eindeutigen Abtragbarkeit der Längen (Bem. auf Seite 1.6): $\beta'X = \beta X$.

Satz 5.3:

Jede Kongruenzabbildung β mit zwei Fixpunkten $P \neq Q$ besitzt PQ als Fixpunktgerade und stellt entweder eine Achsenspiegelung an PQ dar oder die Identität.

Beweis:

1. Wegen der Halbgeradentreue von β (siehe Beweis zu Satz 3.1, Seite 3.2) ist: $\beta(\overline{PQ}) = \overline{\beta P \beta Q} = \overline{PQ}$.

2. Für alle $X \in \overline{PQ}$ folgt: $d(P, X) = d(\beta P, \beta X) = d(P, \beta X)$; wegen $\beta(\overline{PQ}) = \overline{PQ}$ gilt: $\beta X \in \overline{PQ}$, und nach der eindeutigen Abtragbarkeit der Längen auf dem Strahl \overline{PQ} ist $\beta X = X$.

Analog zeigt man, daß die andere Halbgerade von PQ nur aus Fixpunkten besteht.

3. Die Lote auf PQ gehen wegen der Winkelmaßtreue von β in sich über, wobei die Abstände der Punkte zu den Lotfußpunkten erhalten bleiben.

Werden die Halbebenen vertauscht, handelt es sich um eine Achsenspiegelung; anderenfalls um die Identität id .

Aufgabe 5.2: Man zeige, daß jede Kongruenzabbildung mit drei nicht kollinearen Fixpunkten (d.h. mit drei nicht auf ein und derselben Geraden gelegenen Fixpunkten) die Identität ist.

Satz 5.4:

Jede Kongruenzabbildung $\beta: E \rightarrow E$ ist als Verkettung von höchstens 3 Achsenspiegelungen darstellbar.

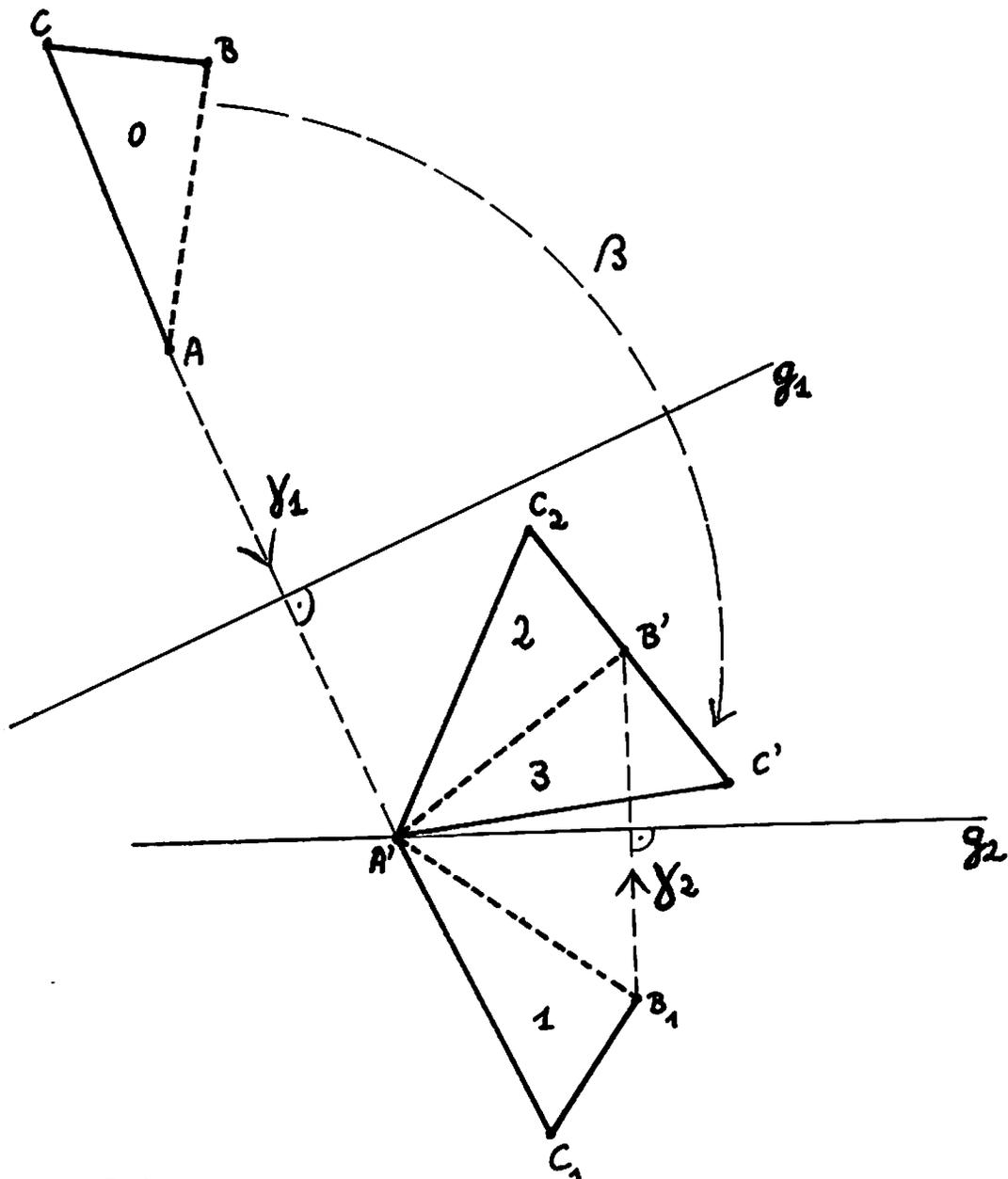
Beweis:

Man wähle in E drei nicht kollineare Punkte A, B, C . Ihre Bilder seien (in dieser Reihenfolge) A', B', C' .

1. g_1 sei die Mittelsenkrechte von $\overline{AA'}$; die zu g_1 gehörige Achsenspiegelung γ_1 bildet A auf A' ab. Die Bilder von B und C seien B_1 und C_1 .
2. g_2 sei die Winkelhalbierende des Winkelfeldes $\sphericalangle B_1 A' B'$. Die zu g_2 gehörige Achsenspiegelung γ_2 hat den Fixpunkt A' und bildet wegen $d(B_1, A') = d(B', A')$ den Punkt B_1 auf B' ab; C_1 habe dabei das Bild C_2 .
3. Nun sind auch die Umkehrabbildungen von γ_1 und γ_2 Achsenspiegelungen (nach Aufgabe 3.3 und 3.5, Seite 3.8). Deshalb existiert mit Sicherheit eine Kongruenzabbildung, welche A' und B' fest läßt, und welche C_2 in C' abbildet, nämlich $\beta\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$.
4. Diese ist nach dem vorangegangenen Satz 5.3 entweder die Identität (a) oder die Achsenspiegelung γ_3 an $A'B'$ (b).
Im Fall (a) folgt aus $\beta\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} = id$ sofort: $\beta = \gamma_2\gamma_1$.
Im Fall (b) folgt aus $\beta\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} = \gamma_3$ sofort: $\beta = \gamma_3\gamma_2\gamma_1$.

Eine Skizze zum Beweis siehe auf der nächsten Seite.

Skizze zum Beweis von Satz 5.4:



Definition 5.1:

Eine Punktmenge $M' \subset E$ heißt KONGRUENT zur Punktmenge $M \subset E$, wenn es eine Kongruenzabbildung β gibt, die M auf M' abbildet:
 $\beta M = M'$.

Man schreibt dafür kurz $M \equiv M'$ und liest "M kongruent M'".

Aufgabe 5.3: Man beweise, daß zwei Strecken genau dann zueinander kongruent sind, wenn sie die gleiche Länge haben.

Aufgabe 5.4: Man beweise, daß je zwei Geraden zueinander kongruent sind.

Aufgabe 5.5: Man beweise, daß je zwei Halbgeraden zueinander kongruent sind.

Satz 5.5:

Zwei Winkelfelder sind genau dann kongruent, wenn sie die gleichen Winkelmaße haben.

Beweis:

\mathcal{W} mit dem Scheitel S und \mathcal{W}' mit dem Scheitel S' seien die beiden Winkelfelder.

(a) Sind \mathcal{W} und \mathcal{W}' kongruent, so gilt wegen der Winkelmaßtreue der Kongruenzabbildungen: $\omega(\mathcal{W}) = \omega(\mathcal{W}')$.

(b) Es sei $\omega(\angle g_1 h_1) = \omega(\angle g'_1 h'_1)$.

1. Fall: $\omega = 0$

Dann sind die Winkelfelder als Halbgeraden kongruent (Aufgabe 5.5).

2. Fall: $0 < \omega < 180$

Wir bilden g_1 kongruent mittels einer Kongruenzabbildung β auf g'_1 ab: $\beta g_1 = g'_1$.

Hierbei sei g'_1 Halbgerade zu g' .

(b₁) Gehört βh_1 derselben abgeschlossenen Halbebene wie h'_1 an, so ist wegen der eindeutigen Abtragbarkeit der Winkelfelder zu gegebenem Winkelmaß (Axiom VII) $\beta h_1 = h'_1$, d.h. $\beta \angle g_1 h_1 = \angle \beta g_1 \beta h_1 = \angle g'_1 h'_1$.

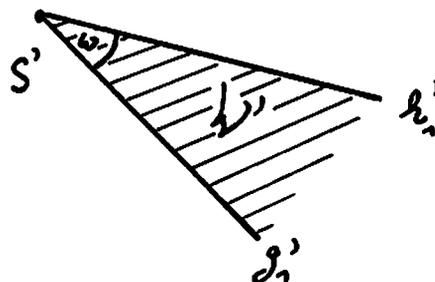
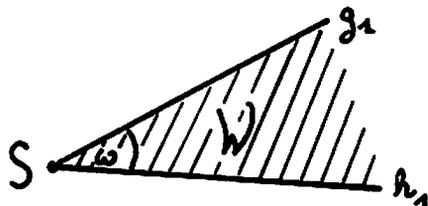
(b₂) Gehören βh_1 und h'_1 verschiedenen (abgeschlossenen) Halbebenen zu g' an, so spiegele man $\beta \angle g_1 h_1$ mittels der Achsenspiegelung γ_1 an g' . Danach ist aus den gleichen Gründen wie unter (b₁)

$$\gamma_1 \beta \angle g_1 h_1 = \angle (\gamma_1 \beta g_1, \gamma_1 \beta h_1) = \angle g'_1 h'_1.$$

3. Fall: $\omega = 180$

Aufgabe .

Aufgabe 5.6: Man löse den Fall (b₂) aus dem Beweis zu Satz 5.5 zeichnerisch mit folgenden Vorgaben:



Bemerkung: Bei der Abbildung von kongruenten Winkelfeldern aufeinander kann beliebig vorgeschrieben werden, welche Schenkel aufeinander abgebildet werden sollen.

Wir kommen nun zur Kongruenz von Dreiecken:

Zwei kongruente Dreiecke stimmen wegen der Längentreue und der Winkelmaßtreue der Kongruenzabbildungen in den Längen entsprechender Seiten und in den Maßen entsprechender Winkelfelder überein.

Die bekannten vier Kongruenzsätze besagen umgekehrt, wann man aus der Übereinstimmung gewisser Winkel- und Seitenmaße auf die Kongruenz zweier Dreiecke schließen darf.

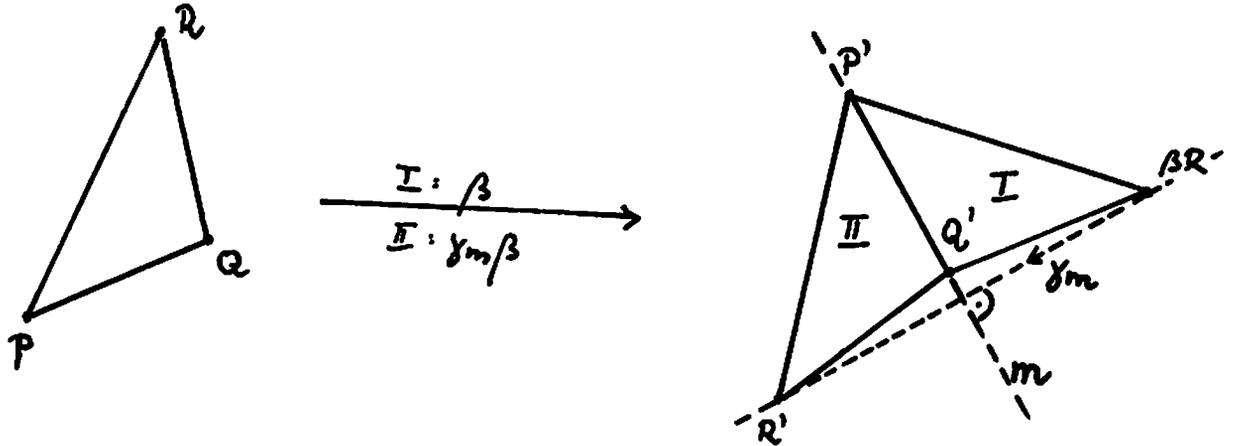
Satz 5.6 (1.Kongruenzsatz - SSS):

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen aller Seiten übereinstimmen.

Beweis:

Es seien $\{P, Q, R\}$ und $\{P', Q', R'\}$ die Dreiecke, und es gelte:
 $d(P, Q) = d(P', Q')$, $d(Q, R) = d(Q', R')$, $d(R, P) = d(R', P')$.

Die Kongruenzabbildung β bilde \overline{PQ} auf $\overline{P'Q'}$ mit $\beta P = P'$
 und $\beta Q = Q'$ ab*) (siehe auch Aufgabe 5.3, S.5.5)



Ist nun $\beta R = R'$, so ist man fertig. Ist $\beta R \neq R'$, so bilde man
 die Mittelsenkrechte m zu $\overline{\beta R R'}$. Mit Aufgabe 3.9, S.3.9

folgt nun: $d(Q', R') = d(Q', \beta R) \Rightarrow Q' \in m$,
 $d(P', R') = d(P', \beta R) \Rightarrow P' \in m$;

wegen $P' = \beta P \neq \beta Q = Q'$ ist $m = P'Q'$.

Die Achsenspiegelung an m , γ_m , hat P' und Q' als Fixpunkte
 und bildet βR auf R' ab.

Die gesuchte Kongruenzabbildung heißt also: $\gamma_m \beta$.

Satz 5.7 (2.Kongruenzsatz - SWS):

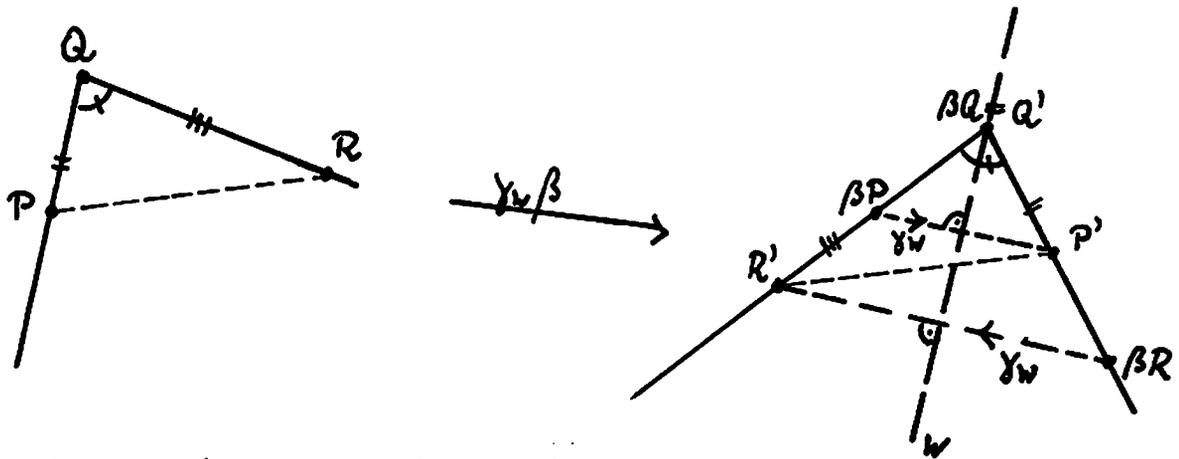
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier
 Seiten und im Maß des durch diese Seiten bestimmten Winkel-
 feldes übereinstimmen.

Beweis:

Es seien $\{P, Q, R\}$ und $\{P', Q', R'\}$ die Dreiecke, und es gelte:
 $d(P, Q) = d(P', Q')$, $d(R, Q) = d(R', Q')$ und $\omega(\sphericalangle PQR) = \omega(\sphericalangle P'Q'R')$

Wir bestimmen eine Kongruenzabbildung gemäß Satz 5.5 so, daß
 das Bild des Winkelfeldes $\sphericalangle PQR$ das Winkelfeld $\sphericalangle P'Q'R'$ ist.
 Dabei wird der Scheitel Q auf den Scheitel Q' abgebildet.

*) Die Zusatzforderung $\beta P = P'$ und $\beta Q = Q'$ ist leicht zu erfüllen!



Ist $\overline{\beta Q \beta P} = \overline{Q' P'}$ und $\overline{\beta Q \beta R} = \overline{Q' R'}$, so ist wegen
 $d(Q, P) = d(\beta Q, \beta P) = d(Q', \beta P) = d(Q', P')$
 und $d(Q, R) = d(\beta Q, \beta R) = d(Q', \beta R) = d(Q', R')$,
 da βR von Q' auf dem Strahl durch R' und βP von Q'
 aus auf dem Strahl durch P' abgetragen wird,

$$\beta R = R' \quad \text{und} \quad \beta P = P' .$$

Ist dagegen $\overline{\beta Q \beta P} = \overline{Q' R'}$ und $\overline{\beta Q \beta R} = \overline{Q' P'}$, so liegen
 βP und βR jeweils auf dem "falschen" Strahl des Winkel-
 felde $\sphericalangle P' Q' R'$ (siehe Abbildung oben).

Dann führt jedoch die β nachzuschaltende Achsenspiegelung
 γ_w an der Winkelhalbierenden w dieses Winkel felde βP
 in P' und βR in R' über.

Vermöge der Abbildung $\gamma_w \beta$ sind die Dreiecke kongruent.

Satz 5.8 (3. Kongruenzsatz - SsW):

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier
 Seiten und im Maß des Winkel felde übereinstimmen, dessen
 Scheitel der längeren Seite gegenüberliegt.

Beweis:

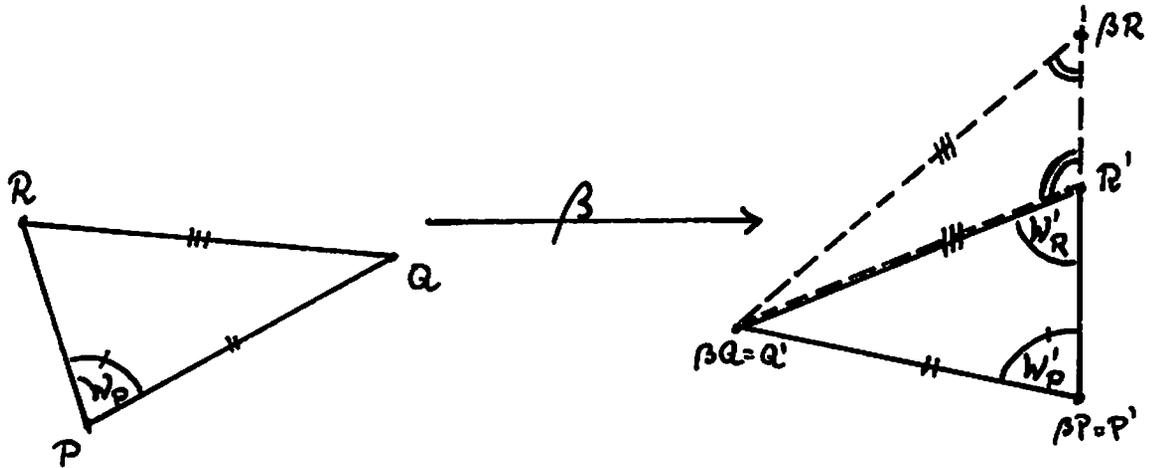
Es seien $\{P, Q, R\}$ und $\{P', Q', R'\}$ die Dreiecke, und es gelte:

$$d(Q, R) = d(Q', R') \geq d(Q', P') = d(Q, P)$$

und $\omega(\sphericalangle RPQ) = \omega(\sphericalangle R' P' Q')$.

1. Das Innenwinkel felde w_P mit dem Scheitel P wird durch
 eine Kongruenzabbildung β auf das Innenwinkel felde w'_P
 mit dem Scheitel P' abgebildet, so daß gilt:

$$\beta P = P' \quad \text{und} \quad \beta Q = Q' .$$



Wegen der Längentreue der Kongruenzabbildungen ist diese Forderung (gemäß Satz 5.5) stets erfüllbar.

Fällt bei dieser Abbildung β das Bild βR mit R' zusammen, so ist alles bewiesen.

2. Angenommen: Es ist $\beta R \neq R'$. Dann liegt βR auf der Halbgeraden $\overrightarrow{P'R'}$ entweder
- (a) zwischen P' und R' oder
 - (b) nicht zwischen P' und R' (d.h. außerhalb von $\overrightarrow{P'R'}$).

Im Falle (b) betrachten wir obige Skizze. Dann ist $\{Q', R', \beta R\}$ ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten: $d(Q', R') = d(Q, R) = d(\beta Q, \beta R)$.

Dieses Dreieck hat bei R' und βR zwei gleich große Innenwinkelfelder mit einem Maß < 90 (man vergleiche dazu Satz 4.2, S.4.1 und Satz 4.4, S.4.2).

Das Nebenwinkelfeld ω'_R bei R' hat infolgedessen das Maß $\omega(\omega'_R) > 90$ (siehe Folgerung 2.1, Seite 2.12).

Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck (Satz 4.20, Seite 4.16) folgt: $\omega(\omega'_P) < 180 - \omega(\omega'_R) < 90$

und damit: $\omega(\omega'_R) > \omega(\omega'_P)$.

Hieraus erhält man im Widerspruch zur Voraussetzung:

$$d(Q', P') > d(Q', R')$$

(man vergleiche dazu Satz 4.8, Seite 4.4)

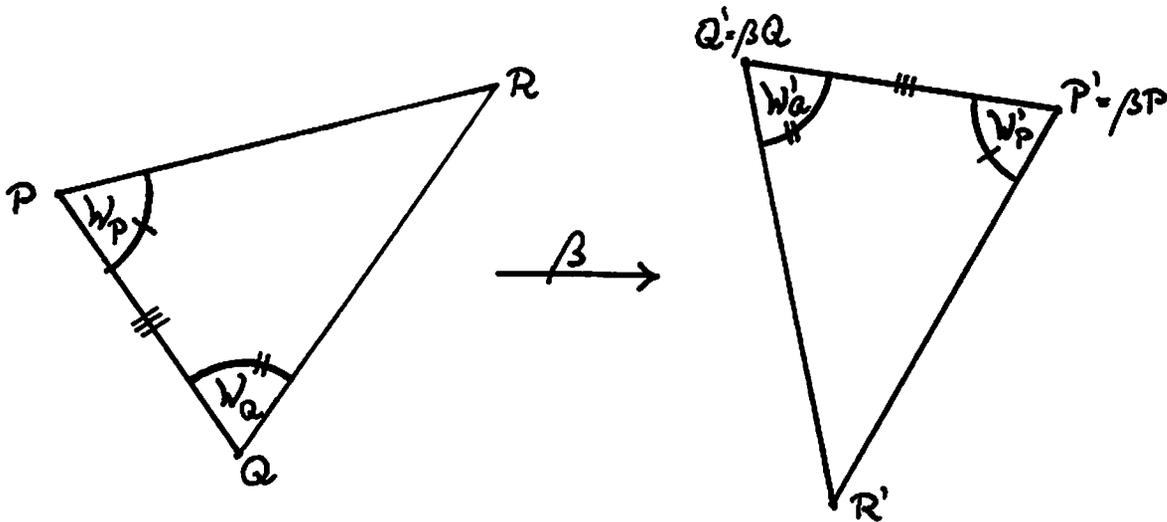
Aufgabe 5.7: Man führe den Fall 2.(a) des Beweises von Satz 5.8 zu einem Widerspruch.

Satz 5.9 (4.Kongruenzsatz - WSW / SWW):

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge einer Seite und in den Maßen der beiden anliegenden Winkelfelder (oder im Maß eines anliegenden und im Maß des Winkelfeldes, dessen Scheitel der Seite gegenüberliegt) übereinstimmen.

Beweis:

$\{P, Q, R\}$ und $\{P', Q', R'\}$ seien die beiden Dreiecke, und es gelte: $d(P, Q) = d(P', Q')$, $\omega(W_P) = \omega(W'_P)$, $\omega(W_Q) = \omega(W'_Q)$.



Wir bilden \overline{PQ} mittels β kongruent auf $\overline{P'Q'}$ ab, so daß $\beta P = P'$ und $\beta Q = Q'$ ist (siehe Aufgabe 5.3).
 Dabei wird β so eingerichtet, daß βR in derselben Halbebene wie R' liegt (durch eine Spiegelung an $Q'P'$ ist dies stets erreichbar). Dann sichert die Winkelmaßstreu von β und die eindeutige Abtragbarkeit der Winkelfelder in eine Halbebene: $\beta(\overline{PR}) = \overline{P'R'}$ und $\beta(\overline{QR}) = \overline{Q'R'}$, d.h.
 $\beta R \in \overline{P'R'}$ und $\beta R \in \overline{Q'R'}$.

Damit ergibt sich $\beta R \in \overline{P'R'} \cap \overline{Q'R'} = \{R'\}$, also $\beta R = R'$.

Bemerkung: Der Fall SWW des 4.Kongruenzsatzes ist sofort auf den Fall WSW reduzierbar (mittels Satz 4.20, S.4.16 läßt sich nämlich das Maß des dritten Innenwinkelfeldes direkt aus den Maßen der beiden gegebenen Winkelfelder berechnen.)

Wir betrachten nun wichtige Untergruppen der Gruppe der Kongruenzabbildungen (Bewegungen). Zu jedem Punkt $Z \in E$ gehört eine Gruppe von "Drehungen" um diesen Punkt Z , (\mathcal{D}_Z, \circ) .

Definition 5.2:

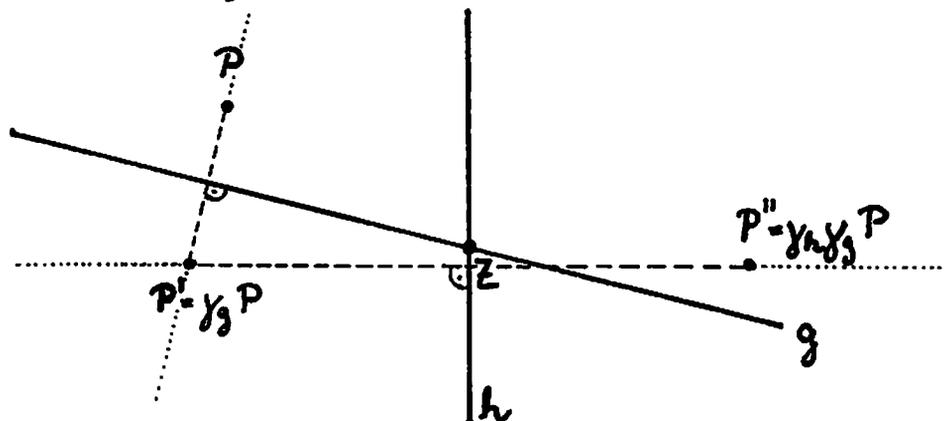
Z sei ein Punkt der beiden Geraden g und h : $\{Z\} \subset g \cap h$. Dann heißt die Verkettung der zu g und zu h gehörigen Achsenspiegelungen, $\delta_Z := \gamma_h \gamma_g : E \rightarrow E$, eine DREHUNG UM Z . Der Punkt Z heißt DREHZENTRUM.

Satz 5.10:

Schneiden^{*)} sich g und h in Z , so besitzt die Drehung $\delta_Z := \gamma_h \gamma_g$ außer Z keinen Fixpunkt.

Beweis:

Die Drehung δ_Z ist gegeben durch die Verkettung $\gamma_h \gamma_g$ der Achsenspiegelungen γ_g und γ_h an g und h .



1. Da Z auf beiden Spiegelachsen liegt, gilt sicher $\gamma_h \gamma_g Z = Z$.
2. Ist $P \neq Z$, aber $P \in g$ oder $\gamma_g P \in h$, dann liegt $\gamma_h \gamma_g P$ in der anderen Halbebene zu h bzw. zu g wie P , und P ist kein Fixpunkt.
3. Ist $P \neq Z$ und $P \notin g$ und $\gamma_g P \notin h$, dann ist der Punkt $P'' = \gamma_h \gamma_g P$ von $P' = \gamma_g P$ und der Punkt $P' = \gamma_g P$ von P verschieden. Da sich g und h in genau einem Punkt Z schneiden, schneiden sich die beiden Senkrechten zu g und h , PP' und $P'P''$, auch in genau einem Punkt, und zwar in P' (vergleiche dazu Aufgabe 4.8, S.4.20).

^{*)} Man beachte: Wir sagen, zwei Geraden schneiden sich, wenn der Durchschnitt genau einen Punkt enthält.

Deshalb müssen P'' und P voneinander verschieden sein.

Bemerkung: Die einzige Drehung mit mehr als einem Fixpunkt ist die Identität; man erhält sie im Falle $g=h$ als $id = \gamma_g \gamma_g$.

Folgerung 5.1:

Ist $\gamma_h \gamma_g = \delta_Z$ eine Drehung um Z , so kann δ_Z keine Achsen-
spiegelung sein, da nur ein Fixpunkt existiert oder $\delta_Z = id$
gilt.

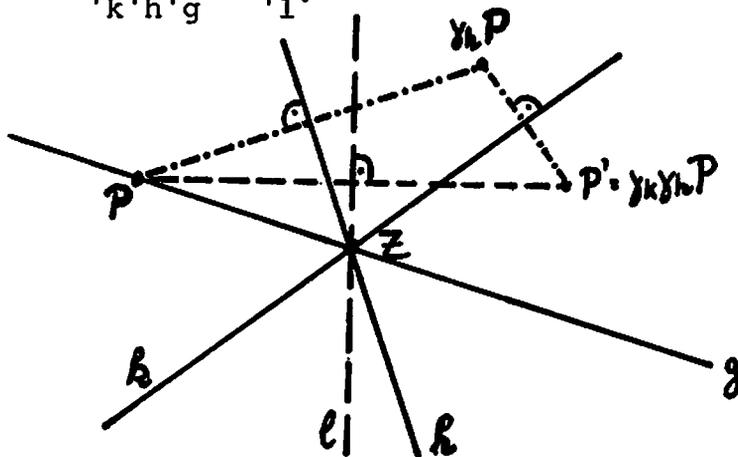
Ehe wir näher auf die Drehungen eingehen, beweisen wir fol-
genden wichtigen Satz:

Satz 5.11 (DREISPIEGELUNGSSATZ):

Besitzen die drei Geraden g, h und k den gemeinsamen Punkt
 Z , so gibt es eine Gerade l durch Z derart, daß die Verkettung
der drei Spiegelungen γ_g, γ_h und γ_k mit γ_l überein-
stimmt:

$$\gamma_k \gamma_h \gamma_g = \gamma_l.$$

Beweis:



Man wähle $P \in g$ mit $P \neq Z$. Auf P wende man die Drehung
 $\gamma_k \gamma_h$ an: $\gamma_k \gamma_h P = P' \neq P$.

Wegen $d(Z, P) = d(Z, P')$ geht die Mittelsenkrechte l von $\overline{PP'}$
durch Z ; spiegelt man P' an ihr, so ist das Bild P :

$$\gamma_l P' = P.$$

Damit folgt:

$$\gamma_l \gamma_k \gamma_h P = \gamma_l P' = P.$$

$\gamma_l \gamma_k \gamma_h$ hat also die Fixpunkte P und Z ; die Gerade $g = PZ$
ist also Fixpunktgerade. Dann muß aber nach Satz 5.3, S.5.3
 $\gamma_l \gamma_k \gamma_h$ die Identität id oder die Achsen-
spiegelung γ_g an g sein.

Wäre nun $\gamma_l \gamma_k \gamma_h = id$, so folgte $\gamma_l^2 \gamma_k \gamma_h = \gamma_l id$, also:

$\gamma_k \gamma_h = \gamma_l$; das ist unmöglich, da eine Drehung nach Folgerung 5.1 keine Spiegelung sein kann. Also gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_l \gamma_k \gamma_h &= \gamma_g \quad , \\ \gamma_l^2 \gamma_k \gamma_h \gamma_g &= \gamma_l \gamma_g^2 \quad , \\ \gamma_k \gamma_h \gamma_g &= \gamma_l \quad . \end{aligned}$$

Satz 5.12:

Die Drehungen um einen Punkt $Z \in E$ bilden eine kommutative Untergruppe (\mathcal{D}_Z, \circ) der Gruppe (\mathcal{B}, \circ) der Kongruenzabbildungen (Bewegungen).

Beweis:

Wegen $\mathcal{D}_Z \subset \mathcal{B}$ ist nur noch zu zeigen:

- (1) $\delta_1 \in \mathcal{D}_Z \quad \delta_2 \in \mathcal{D}_Z \quad \delta_2 \delta_1 \in \mathcal{D}_Z$
- (2) $\delta \in \mathcal{B} \quad [\delta \in \mathcal{D}_Z \Rightarrow \delta^{-1} \in \mathcal{D}_Z]$
- (3) $\delta_1 \in \mathcal{D}_Z \quad \delta_2 \in \mathcal{D}_Z \quad \delta_1 \delta_2 = \delta_2 \delta_1 \quad .$

Zu (1):

Es seien $\delta_1 = \gamma_h \gamma_g$ und $\delta_2 = \gamma_l \gamma_k$. Dann ist $\delta_2 \delta_1 = \gamma_l \gamma_k \gamma_h \gamma_g$.

Nach dem Dreispiegelungssatz gibt es eine Gerade j durch

Z derart, daß gilt:

$$\gamma_l \gamma_k \gamma_h = \gamma_j \quad .$$

Damit erweist sich (1): $\delta_2 \delta_1 = \gamma_j \gamma_g =: \delta \in \mathcal{D}_Z \quad .$

Aufgabe 5.8: Man beweise die noch ausstehenden Behauptungen

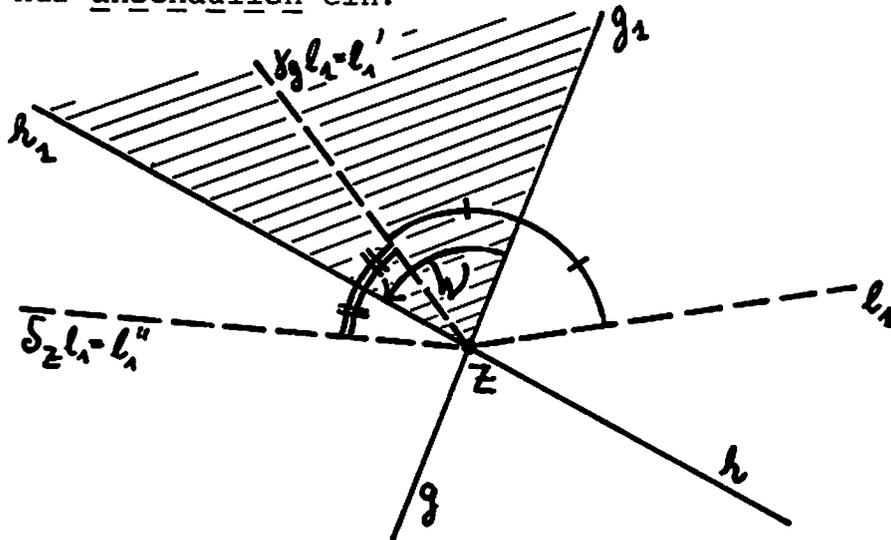
(2) und (3) aus dem Beweis zu Satz 5.12.

Hinweis zu (3): Nach dem Dreispiegelungssatz folgt:

$$\gamma_l \gamma_k \gamma_h = \gamma_h \gamma_k \gamma_l \quad .$$

Aufgabe 5.9: Man zeige, daß die Menge $\{\delta_Z\} = \mathcal{D}_Z$ der Drehungen um einen Punkt Z , vereinigt mit der Menge $S_Z = \{\gamma_{g_Z}\}$ aller Achsenpiegelungen an den Geraden, die Z enthalten, mit der Verkettung eine Gruppe $(\{\delta_Z\} \cup \{\gamma_{g_Z}\}, \circ)$ bildet.

Jeder Drehung kann ein bestimmtes Winkelfeld und dadurch über dessen Winkelmaß ein bestimmtes Drehmaß zugeordnet werden. Die für die Eindeutigkeit der Zuordnung notwendige Orientierung der Ebene führen wir aus Gründen der Vereinfachung nur anschaulich ein:



Bildet die Drehung $\delta_Z := \gamma_h \gamma_g$ die Halbgerade l_1 mit dem Anfangspunkt Z auf die Halbgerade $\delta_Z l_1 := l_1''$ ab, so erhält δ_Z als Drehmaß das doppelte Maß des Winkelfeldes ω , welches als Rand eine Halbgerade g_1 von g besitzt und diejenige Halbgerade h_1 von h , in welche g_1 "bei Linksdrehung um Z " zuerst übergeht.

Da die Winkelmaße Elemente der Menge $[0, 180]$ sind, gehören die Drehmaße der Menge $[0, 360]$ an.

Satz 5.13:

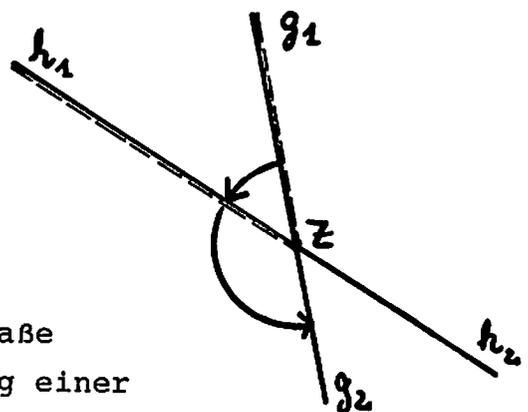
Ist $\delta_Z := \gamma_h \gamma_g$ eine Drehung um Z mit dem Drehmaß $2\omega(\angle g_1 h_1)$, dann hat die inverse Drehung um Z , $\delta_Z^{-1} = \gamma_g \gamma_h$, das Drehmaß $360 - 2\omega(\angle g_1 h_1)$.

Beweis:

Die Aussage wird durch die nebenstehende Skizze klar:

δ_Z^{-1} hat das Maß $2\omega(\angle h_1 g_2) =$

$$2 \cdot (180 - \omega(\angle g_1 h_1)) = 360 - 2\omega(\angle g_1 h_1) .$$

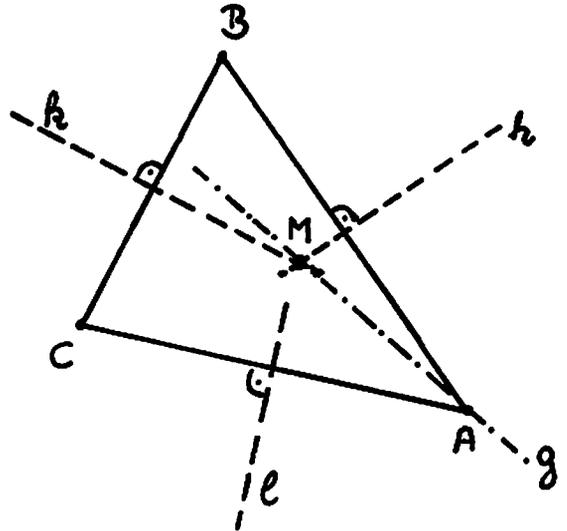


Man beachte: Oft werden negative Drehmaße angegeben. Diesen liegt die Vorstellung einer

"Rechtsdrehung" von g_1 um Z in h zugrunde, wenn wieder $\delta_Z^{-1} := \gamma_g \gamma_h$ angenommen ist.

Aufgabe 5.10: Man beweise mit Hilfe des Satzes 5.11, daß in einem Dreieck $\{A, B, C\}$ die drei Mittelsenkrechten durch einen Punkt gehen

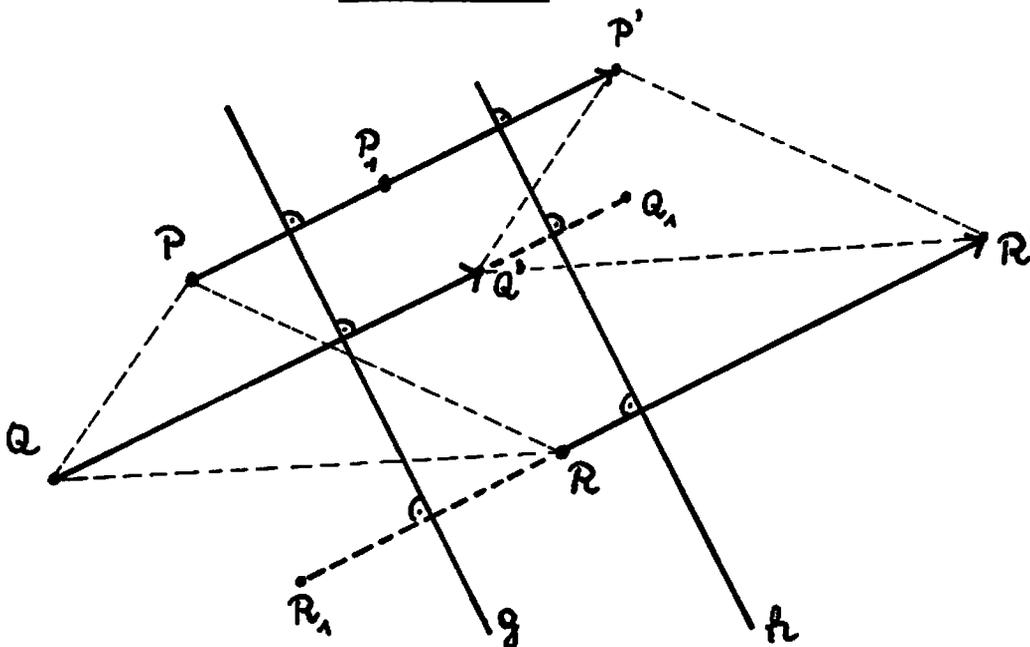
Anl.: Sei gemäß nebenstehender Skizze k die Mittelsenkrechte zu \overline{BC} , h die Mittelsenkr. zu \overline{AB} und l die Mittelsenkr. zu \overline{AC} . Sei $g := AM$, wobei $\{M\} = h \cap k$. Man wende den Dreispiegelungssatz auf $\gamma_k \gamma_h \gamma_g$ an und zeige mittels $\gamma_k \gamma_h \gamma_g A = C$, daß gilt: $\gamma_k \gamma_h \gamma_g = \gamma_l$ und somit: $M \in l$.



Neben den Achsenspiegelungen und den Drehungen bilden die "Translationen" (Verschiebungen) wichtige Bewegungen der Ebene.

Definition 5.3:

Jede Verkettung von zwei Achsenspiegelungen an parallelen Geraden heißt eine TRANSLATION.



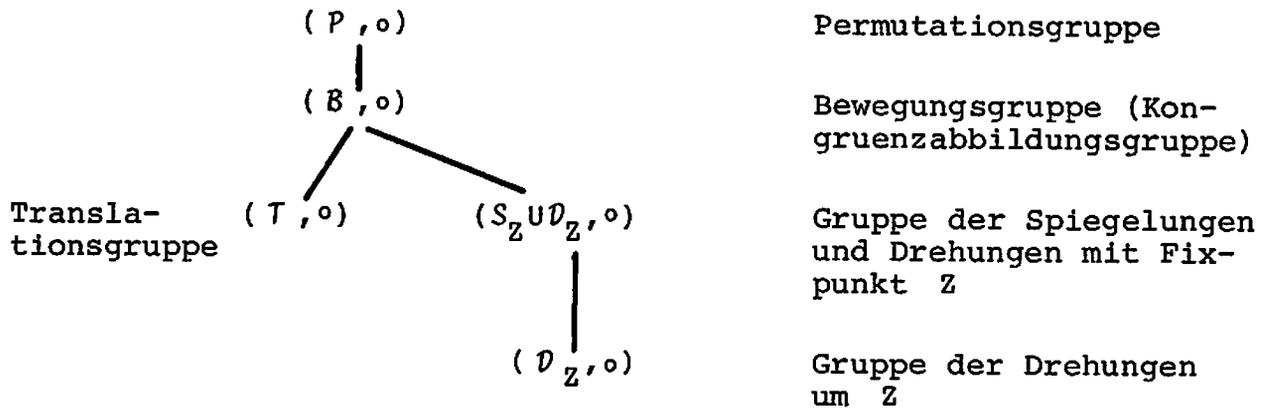
Satz 5.14:

- (1) Jede Translation lässt sich als Verkettung von zwei Punktspiegelungen darstellen.
- (2) Jede Translation bildet jede Gerade k auf eine zu k parallele Gerade ab.
- (3) Zu je zwei Punkten $P, P' \in E$ gibt es eine Translation τ , die P in P' überführt: $\tau P = P'$.
- (4) Die nach (3) existierende Translation ist eindeutig bestimmt.
- (5) Die Menge T der Translationen bildet mit der Verkettung \circ als Verknüpfung eine kommutative Untergruppe (T, \circ) der Bewegungsgruppe (B, \circ) .
- (6) Bei jeder Translation ist der Abstand zwischen Punkt und Bildpunkt doppelt so groß wie der Abstand zwischen den beiden Spiegelachsen.
- (7) Jede Verkettung von zwei Punktspiegelungen ist eine Translation.

Beweis: Aufgabe

Wir bringen jetzt einen

1. Überblick über die betrachteten Abbildungen:



Aufgabe 5.11: Zählen Sie endliche Untergruppen von (B, \circ) auf.

§6 Ähnlichkeit

Über Ähnlichkeit ist bis jetzt nur im Rahmen der Behandlung der Ähnlichkeitsabbildungen gesprochen worden. Wir werden in diesem Kapitel die bisher unsystematisch erarbeiteten Ergebnisse zusammenstellen und weiter vertiefen.

In §3 haben wir festgelegt (s.S.3.3):

Definition 3.2:

Eine Bijektion $\alpha: E \rightarrow E$ heißt **ÄHNLICHKEITSABBILDUNG**, wenn sie (1)geradentreu, (2)längenverhältnistreue und (3)winkelmaßtreu ist.

Man kann nun die folgende Aussage beweisen:

Satz 6.1:

Jede geraden- und längenverhältnistreue Bijektion $\alpha: E \rightarrow E$ ist

- (a) streckentreu,
- (b) halbgeradentreu,
- (c) halbebenentreu und
- (d) winkelfeldtreu.

Auf die Durchführung des Beweises verzichten wir; denn der Beweisaufbau wird analog dem Beweis zu Satz 3.1, Seite 3.2-3.3 durchgeführt (dort war Geraden- und Längentreue vorausgesetzt worden).

Wir merken an, daß die Beweisbarkeit der Winkelfeldtreue (d) die wesentliche Voraussetzung dafür ist, daß die Forderung der Winkelmaßtreue in Definition 3.2 sinnvoll ist.

Satz 6.2:

Die Menge der Ähnlichkeitsabbildungen \mathring{A} bildet mit der Verkettung als Verknüpfung eine Gruppe (\mathring{A}, \circ) .

Beweis:

Als spezielle Bijektionen bilden die Ähnlichkeitsabbildungen eine Teilmenge \mathring{A} der Menge aller Permutationen P der

Ebene E . Nach einem Untergruppenkriterium ist (\check{A}, \circ) eine Gruppe, wenn gilt:

- (1) $\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \alpha_1 \in \check{A} \quad \alpha_2 \in \check{A} \end{array} \quad \alpha_2 \circ \alpha_1 \in \check{A} \quad ,$
- (2) $\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \in \check{A} \quad \alpha^{-1} \in \check{A} \end{array} .$

Zu (1): Es ist sofort klar, daß mit α_1 und α_2 auch $\alpha_2 \circ \alpha_1$ geraden- und längenverhältnistreu ist.

Damit ergibt sich nach Satz 6.1 auch die Winkelfeldtreue und wegen der vorausgesetzten Winkelmaßtreue von α_1 und α_2 auch die Winkelmaßtreue von $\alpha_2 \circ \alpha_1$. Daß $\alpha_2 \circ \alpha_1$ eine Bijektion ist, ergibt sich aus der Permutationseigenschaft. Demnach wird (1) erfüllt.

Zu (2): Es ist unmittelbar einzusehen, daß α^{-1} geraden- und längenverhältnistreu sein muß, wenn das für α zutrifft. Nach Satz 6.1 ist dann α^{-1} auch winkelfeldtreu.

Nun können wir die Winkelmaßtreue prüfen:

$$\omega(\alpha^{-1}W) = \omega(\alpha \circ \alpha^{-1}W) = \omega W \quad , \text{ da } \alpha \text{ Winkelmaßtreu ist.}$$

Aufgabe 6.1: Man leite die Geraden- und Längenverhältnistreu von α^{-1} aus der von α ab.

Wir wollen uns jetzt - entsprechend unserem Vorgehen bei der Untersuchung der Kongruenzabbildungen - einen Überblick über sämtliche Ähnlichkeitsabbildungen verschaffen.

Es ist klar, daß jede Kongruenzabbildung eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem Ähnlichkeitsfaktor $c=1$ darstellt.

Wir stellen damit fest:

Satz 6.3:

Die Gruppe der Kongruenzabbildungen (\mathcal{B}, \circ) ist eine Untergruppe der Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen, (\check{A}, \circ) .

Daneben haben wir weitere Ähnlichkeitsabbildungen kennengelernt:

Das STRECKUNGSAXIOM (Axiom IX - Seite 4.8) legt fest:

Jede Streckung $\sigma: E \rightarrow E$ ist eine Ähnlichkeitsabbildung.

Über Streckungen wissen wir:

- (1) Jede Streckung mit $k \neq 1$ besitzt genau einen Fixpunkt, Zentrum Z genannt. (S.Aufg.3.12, Seite 3.9)
- (2) Geraden durch das Zentrum Z werden auf sich abgebildet. (Def.3.7(2), Seite 3.9)
- (3) Jede Gerade g wird auf eine zu g parallele Gerade abgebildet. (Satz 4.10, Seite 4.9)
- (4) Das Ähnlichkeitsverhältnis einer Streckung ist gleich dem Betrag des Streckfaktors k : $c = |k|$. (Satz 4.11, Seite 4.9)

Wir wollen nun eine wichtige Beziehung zwischen den Ähnlichkeitsabbildungen einerseits und den Kongruenzabbildungen und Streckungen andererseits aussprechen.

Satz 6.4:

Jede Ähnlichkeitsabbildung α ist als Verkettung einer Kongruenzabbildung β mit einer Streckung σ darstellbar:

$$\alpha = \sigma \circ \beta .$$

Dabei kann das Zentrum Z von σ beliebig gewählt werden.

Beweis:

1. Sei $\alpha \in \mathbb{A}$ und $c > 0$ das Ähnlichkeitsverhältnis von α , so daß gilt:

$$\begin{array}{c} \triangle \\ P \in E \quad Q \in E \end{array} d(\alpha P, \alpha Q) = c \cdot d(P, Q) .$$

2. Zu beliebigem Punkt Z wählen wir eine Streckung σ' mit Z als Zentrum und $\frac{1}{c} =: k$ als Streckfaktor.

3. Dann ist $\sigma' \circ \alpha$ als Verkettung zweier Ähnlichkeitsabbildungen selbst eine Ähnlichkeitsabbildung. Wegen

$$d(\sigma' \circ \alpha P, \sigma' \circ \alpha Q) = \frac{1}{c} \cdot d(\alpha P, \alpha Q) = \frac{1}{c} \cdot c \cdot d(P, Q) = d(P, Q)$$

für $P, Q \in E$ ist diese Ähnlichkeitsabbildung längentreu und daher eine Kongruenzabbildung β : $\beta = \sigma' \circ \alpha$.

4. Sei σ die inverse Streckung^{*)} zu σ' . Dann gilt:

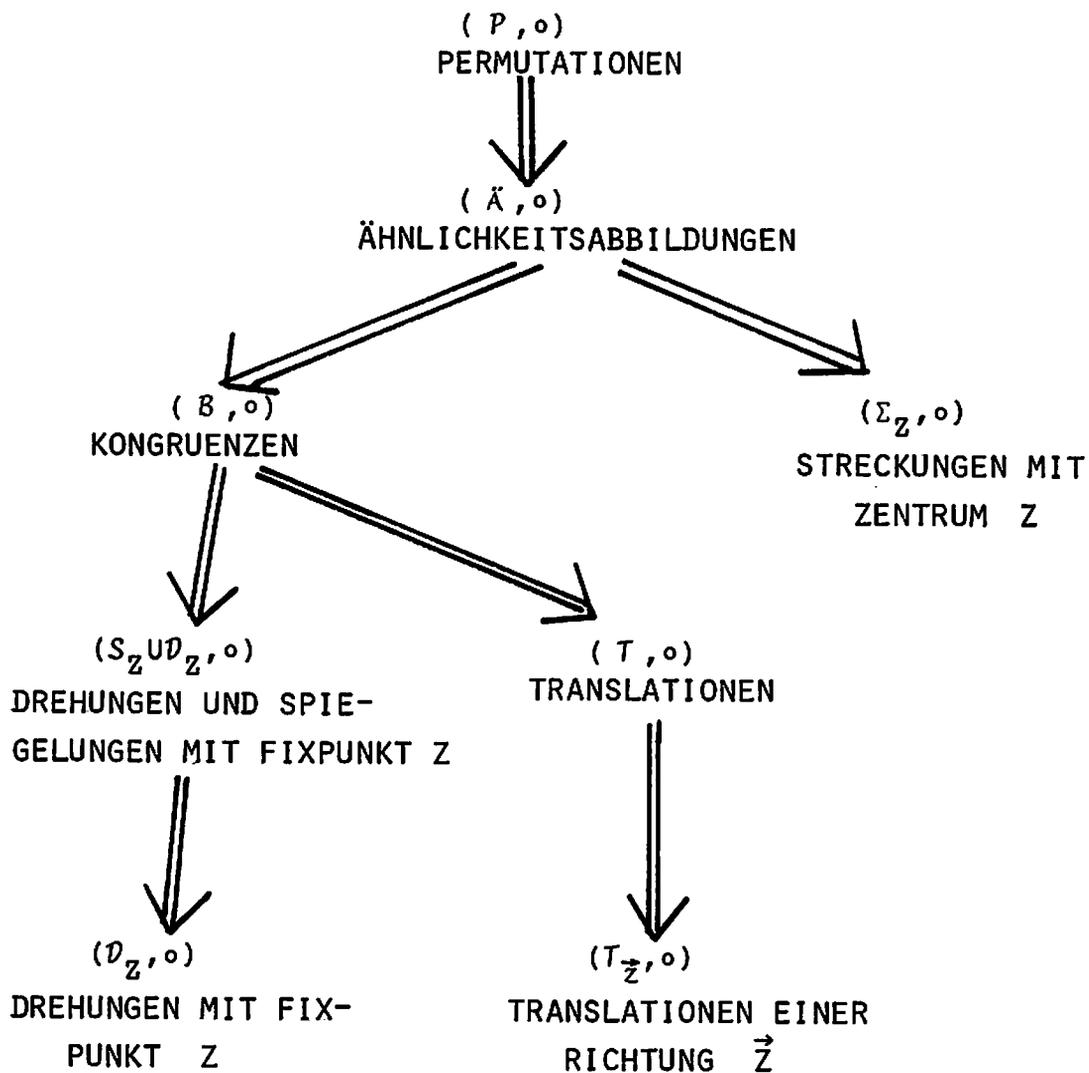
$$\sigma \circ \beta = \alpha .$$

*) Man beachte die folgende Aufgabe 6.2 !

Aufgabe 6.2: Man beweise, daß die Menge der Streckungen zu einem festen Zentrum Z mit der Verkettung als Verknüpfung eine kommutative Gruppe (Σ_Z, \circ) bildet.

Aufgabe 6.3: Man zeige, daß man jede Ähnlichkeitsabbildung α auch als Verkettung einer Streckung σ mit einer Kongruenzabbildung β darstellen kann: $\alpha = \beta \circ \sigma$.

2. Abbildungsüberblick (Gruppen und Untergruppen):



Bemerkungen: Es gibt weitere Abbildungsgruppen, die unser Überblick nicht enthält. Ob eine gegebene Menge von Abbildungen mit der Verkettung eine Gruppe bildet, ist von Fall zu Fall zu entscheiden:

- Die Menge aller derjenigen Abbildungen, die sich durch Hintereinanderausführung endlich vieler Drehungen oder Streckungen mit einem gemeinsamen Zentrum Z bilden lassen, ist mit der Verkettung eine (sogar kommutative) Gruppe.
- Die Menge der Achsenspiegelungen bildet mit der Verkettung keine Gruppe.
- Die Menge aller Drehungen in E bildet mit der Verkettung keine Gruppe.
- Jede Achsenspiegelung bildet mit der Identität id_E bezüglich " \circ " eine zweielementige Gruppe.

Entsprechend einer Aussage über Kongruenzabbildungen (Satz 5.2, Seite 5.2) gilt:

Satz 6.5:

Jede Ähnlichkeitsabbildung ist durch die Angabe von drei nicht kollinearen Punkten und deren Bildern eindeutig bestimmt.

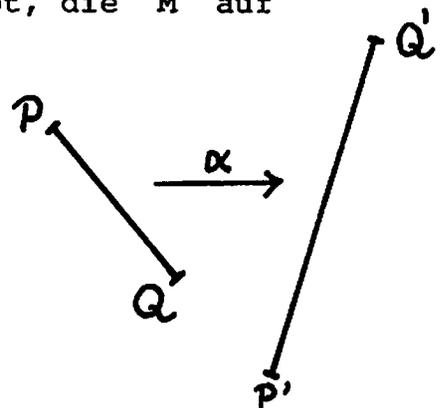
Die Beweisführung entspricht der auf den Seiten 5.2-5.3 und entfällt hier.

Definition 6.1:

Eine Punktmenge $M' \subset E$ heißt der Punktmenge $M \subset E$ ÄHNLICH, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung $\alpha \in \mathcal{A}$ gibt, die M auf M' abbildet, d.h. mit $\alpha M = M'$.

Aufgabe 6.4: Man beweise, daß zwei beliebige Strecken einander ähnlich sind.

Aufgabe 6.5: Warum sind je zwei Geraden, je zwei Halbgeraden, je zwei Winkelfelder mit gleichem Winkelmaß einander ähnlich?



Wir untersuchen jetzt die Ähnlichkeit von Dreiecken. Zwei ähnliche Dreiecke stimmen in den Maßen entsprechender Winkelfelder (Winkelmaßtreue) und in den Längenverhältnissen

entsprechender Seiten überein.

Die vier Ähnlichkeitssätze für Dreiecke besagen umgekehrt, worin zwei Dreiecke übereinstimmen müssen, damit sie ähnlich sind, d.h. durch eine Ähnlichkeitsabbildung aufeinander abgebildet werden können:

Sätze 6.6 - 6.9:

Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn sie übereinstimmen

(6) in den Verhältnissen der Längen entsprechender Seiten.

(7) in den Verhältnissen der Längen zweier Seiten und im Maß des durch diese Seiten bestimmten Winkelfeldes.

(8) in den Verhältnissen der Längen zweier Seiten und im Maß des Winkelfeldes, dessen Scheitel der längeren Seite gegenüberliegt.

(9) in den Maßen zweier (also aller) Winkelfelder.

Beweis:

Es seien $\{P, Q, R\}$ und $\{P', Q', R'\}$ die beiden Dreiecke.

1. Wir bilden $\{P, Q, R\}$ durch eine Streckung σ auf $\{\sigma P, \sigma Q, \sigma R\}$ ab, wobei wir den Streckfaktor k von σ so bemessen, daß eine Seite von $\{\sigma P, \sigma Q, \sigma R\}$ genau so lang wird wie die entsprechende Seite von $\{P', Q', R'\}$.

2. Dann sind für $\{\sigma P, \sigma Q, \sigma R\}$ und $\{P', Q', R'\}$ im Falle

(6) die Voraussetzungen des 1. Kongruenzsatzes (SSS),

(7) die Voraussetzungen des 2. Kongruenzsatzes (SWS),

(8) die Voraussetzungen des 3. Kongruenzsatzes (SsW),

(9) die Voraussetzungen des 4. Kongruenzsatzes (WSW)

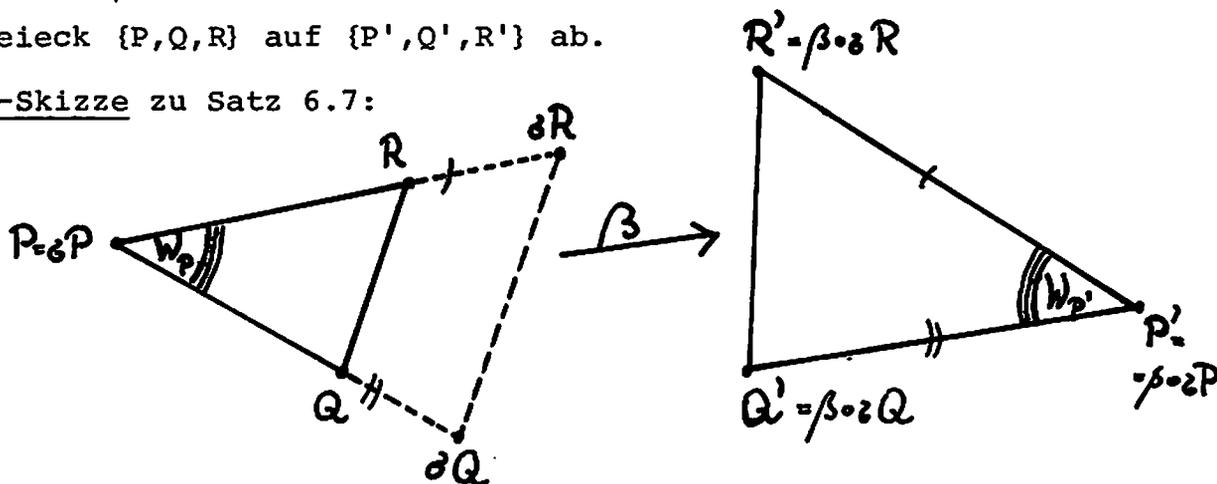
erfüllt. Es gibt daher in jedem dieser Fälle eine Kongruenzabbildung β , welche das Dreieck $\{\sigma P, \sigma Q, \sigma R\}$ auf $\{P', Q', R'\}$ abbildet;

dann bildet aber die Ähnlichkeitsabbildung

$$\beta \circ \sigma: E \rightarrow E$$

das Dreieck $\{P, Q, R\}$ auf $\{P', Q', R'\}$ ab.

Beispiel-Skizze zu Satz 6.7:



Wir sind nun in der Lage, die Sätze aus der pythagoräischen Satzgruppe zu beweisen.

Wir erinnern an zwei in Definition 4.4 (Seite 4.21) erklärte Begriffe:

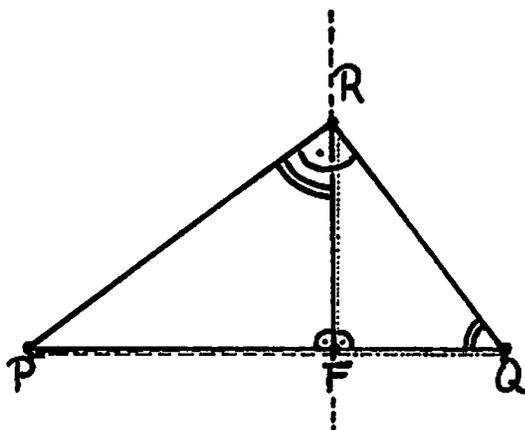
In jedem Dreieck heißt das Lot durch eine Ecke auf die durch die beiden anderen Ecken bestimmte Gerade eine HÖHE. Die durch die Ecke und den Lotfußpunkt bestimmte Strecke nennen wir HÖHENABSCHNITT.

Satz 6.10 (HÖHENSATZ von EUKLID):

In jedem rechtwinkligen Dreieck wird die Hypotenuse durch die zugehörige Höhe derart in zwei Strecken zerlegt, daß das Produkt der Längen dieser Hypotenusenabschnitte gleich dem Quadrat der Länge des Höhenabschnitts ist.

Beweis:

Ist F der Lotfußpunkt, so sind die drei Dreiecke $\{P, Q, R\}$, $\{R, Q, F\}$, $\{P, R, F\}$ ähnlich, da sie in den Maßen einander entsprechender Winkelfelder übereinstimmen.



Infolgedessen gilt:

$$\frac{d(R, F)}{d(P, F)} = \frac{d(F, Q)}{d(R, F)} = \frac{d(R, Q)}{d(P, R)} \quad \text{Aus dem linken Teil der}$$

Gleichungskette ergibt sich aber sofort die Behauptung:

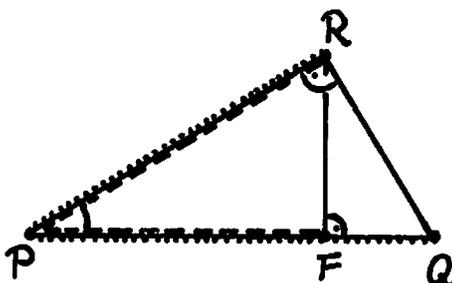
$$\underline{d(R, F)^2 = d(P, F) \cdot d(F, Q)} \quad .$$

Satz 6.11 (KATHETENSATZ des EUKLID):

In jedem rechtwinkligen Dreieck wird die Hypotenuse durch die zugehörige Höhe derart in zwei Strecken zerlegt, daß das Produkt aus der Länge der Hypotenuse mit der Länge eines Hypotenusenabschnitts gleich dem Quadrat der Länge derjenigen Kathete, die dem Abschnitt anliegt.

Beweis:

In der nebenstehenden Figur gilt aus Ähnlichkeitsgründen:



$$\frac{d(P,F)}{d(P,R)} = \frac{d(P,R)}{d(P,Q)} .$$

Daraus folgt sofort die Behauptung:

$$\underline{d(P,Q) \cdot d(P,F) = d(P,R)^2} .$$

Satz 6.12 (LEHRSATZ DES PYTHAGORAS):

Bildet man in einem rechtwinkligen Dreieck die Summe aus den Quadraten der Längen der Katheten, so erhält man das Quadrat der Länge der Hypotenuse.

Beweis:

Wir wenden zweimal den Kathetensatz auf das nebenstehende Dreieck an und addieren:

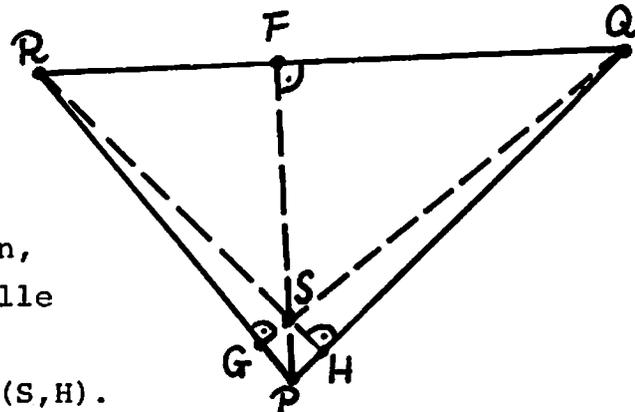
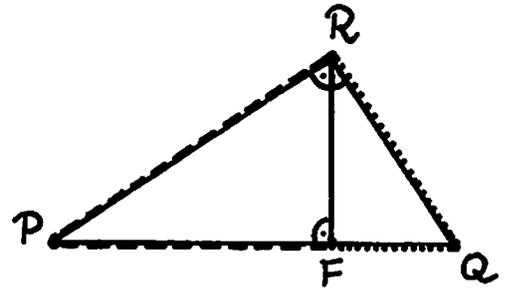
$$d(P,R)^2 = d(P,Q) \cdot d(P,F)$$

$$d(Q,R)^2 = d(P,Q) \cdot d(F,Q)$$

$$d(P,R)^2 + d(Q,R)^2 = d(P,Q) \cdot [d(P,F) + d(F,Q)]$$

Es folgt die Behauptung:

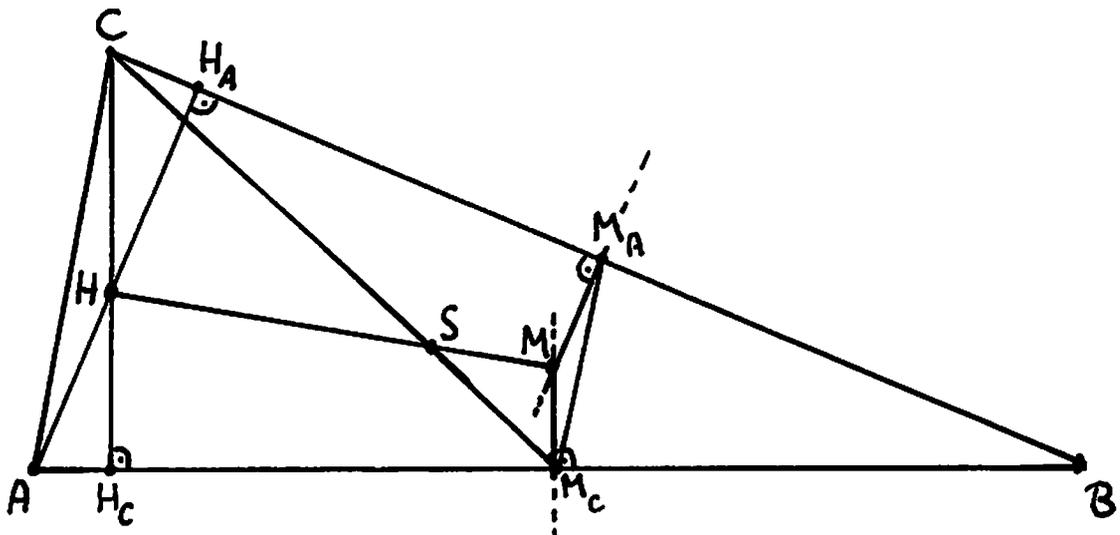
$$\underline{d(P,R)^2 + d(Q,R)^2 = d(P,Q)^2} .$$



Aufgabe 6.6: Man beweise:

Der Höhenabschnitt eines Dreiecks zerlegt jeden anderen Höhenabschnitt dieses Dreiecks derart in zwei Strecken, daß das Produkt von deren Längen für alle Höhen gleich groß ist; d.h. es gilt:
 $d(P,S) \cdot d(S,F) = d(Q,S) \cdot d(S,G) = d(R,S) \cdot d(S,H)$.

Wir betrachten nun ein beliebiges Dreieck mit seinem Höhenabschnitt H und dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, M.



Aufgabe 6.7: Man beweise, daß die Seiten der Dreiecke $\{A, H, C\}$ und $\{M_A, M, M_C\}$ paarweise parallel sind.

Aufgabe 6.8: Man beweise, daß die Dreiecke $\{A, H, C\}$ und $\{M_A, M, M_C\}$ einander ähnlich sind.

Hinweis: Man führe durch Punktspiegelungen die Ecke M_A in A bzw. die Ecke M_C in C über und beachte Def.3.2 und Satz 4.10 auf Seite 4.9.

Aufgabe 6.9: Man beweise, daß die Dreiecke $\{C, H, S\}$ und $\{M_C, M, S\}$ ähnlich sind.

Aus den Aufgaben 6.7 - 6.9 resultiert die folgende Proportion:

$$\frac{2}{1} = \frac{d(A, C)}{d(M_C, M_A)} = \frac{d(C, H)}{d(M_C, M)} = \frac{d(C, S)}{d(S, M_C)} = \frac{d(H, S)}{d(S, M)} .$$

Aus $\frac{2}{1} = \frac{d(C, S)}{d(S, M_C)}$ ergibt sich, daß S den Abschnitt $\overline{CM_C}$ der Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt und demnach der Seitenhalbierendenschnittpunkt ist.

Aus $\frac{d(H, S)}{d(S, M)} = \frac{2}{1}$ ergibt sich somit der

Satz 6.13:

In jedem Dreieck liegen der Schnittpunkt der Höhen H, der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten M und der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden S auf einer Geraden, und S teilt die Strecke \overline{HM} im Verhältnis 2:1 .

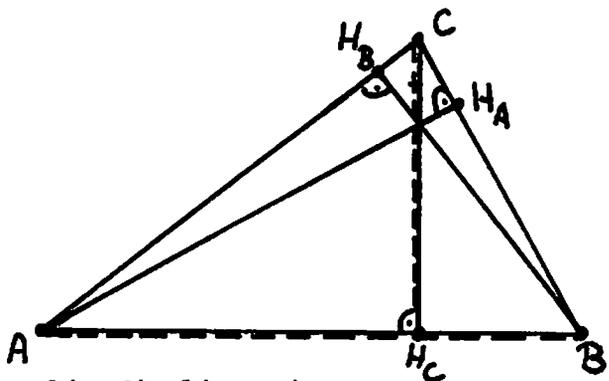
Definition 6.2:

Die Gerade durch den Höhenschnittpunkt und den Mittelsenkrechtenschnittpunkt eines Dreiecks heißt EULERSche GERADE.

Aufgabe 6.10: Man beweise:

In jedem Dreieck sind die drei Produkte aus den Seitenlängen und den Längen der zu den Seiten senkrechten Höhenabschnitte einander gleich, d.h.

$$d(A, B) \cdot d(C, H_C) = d(A, C) \cdot d(B, H_B) = d(B, C) \cdot d(A, H_A) .$$

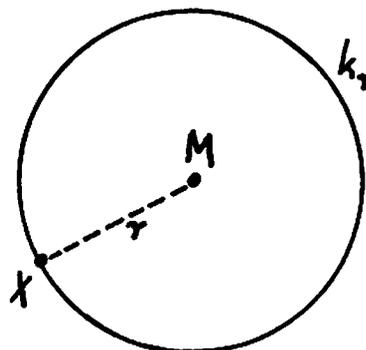


§7 Kreislehre

Definition 7.1:

Ist M ein Punkt in der Ebene E und $r > 0$, so versteht man unter dem KREIS mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r die Menge aller Punkte $X \in E$, welche von M den Abstand r haben:

$$k_r := \{X \mid d(X, M) = r\}_E .$$



Satz 7.1:

Jeder Kreis k_r besitzt unendlich viele Punkte.

Beweis: Aufgabe

Satz 7.2:

Jede Gerade g durch den Mittelpunkt M eines Kreises k_r ist Symmetrieachse von k_r .

Beweis:

Mit $P \in k_r$ gilt auch $\gamma_g P \in k_r$, denn:

$$d(P, M) = d(\gamma_g P, \gamma_g M) = d(\gamma_g P, M).$$

Daraus folgt:

$$\gamma_g k_r \subset k_r . \quad (1)$$

Wiederholte Anwendung von γ_g liefert

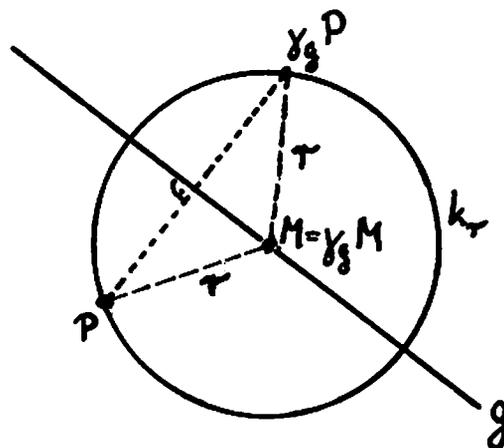
$$\text{jetzt: } \gamma_g \gamma_g k_r \subset \gamma_g k_r$$

$$\Leftrightarrow \text{id } k_r \subset \gamma_g k_r$$

$$\Leftrightarrow k_r \subset \gamma_g k_r . \quad (2)$$

(1) und (2) zusammen ergeben:

$$\underline{\gamma_g k_r = k_r .}$$



Satz 7.3:

M sei ein Punkt, $g \subset E$ eine Gerade und $M \notin g$. F sei der Fußpunkt des Lotes l von M auf g . Ist $d(M, F) < r$, so schneidet der Kreis um M mit dem Radius r genau zweimal die Gerade g .

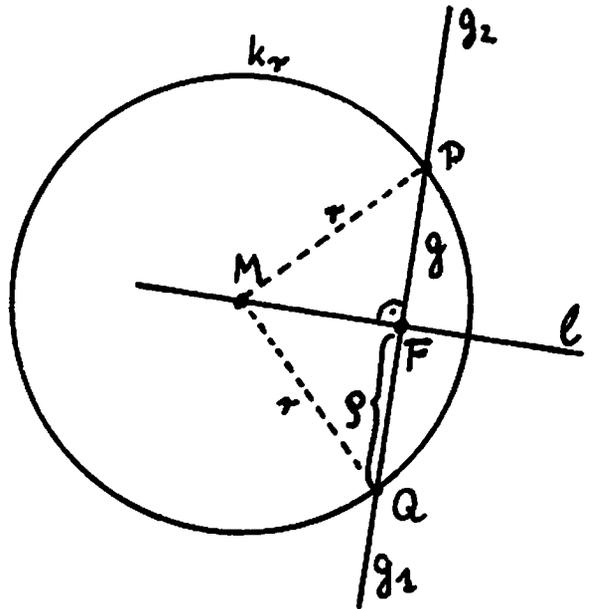
Beweis:

Auf der einen Halbgeraden g_1 von g mit Anfangspunkt F trage man von F aus das Maß

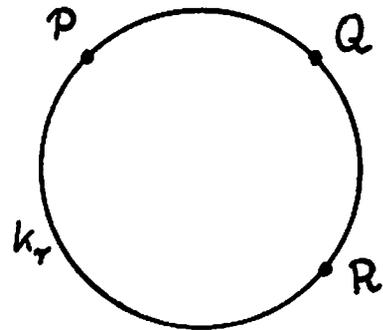
$$\rho := \sqrt{r^2 - d(M, F)^2} > 0 \quad \text{ab.}$$

Der zugehörige Punkt $Q \in g_1$ liegt auf k_r und auf g . Da $d(Q, F)^2 + d(M, F)^2 = \rho^2 + d(M, F)^2 = r^2$ gelten muß, kann es keinen von Q verschiedenen Punkt Q_1 auf g_1 geben, der auch auf k_r liegt.

Entsprechend gibt es auf der Halbgeraden $g_2 := g \setminus g_1 \cup \{F\}$ genau einen Punkt $P \in E$ mit $P \in k_r \cap g_2$.



Aufgabe 7.1: Gegeben seien drei Punkte P, Q, R eines Kreises k_r im Raume (E, G) . Man bestimme den Mittelpunkt M von k_r .



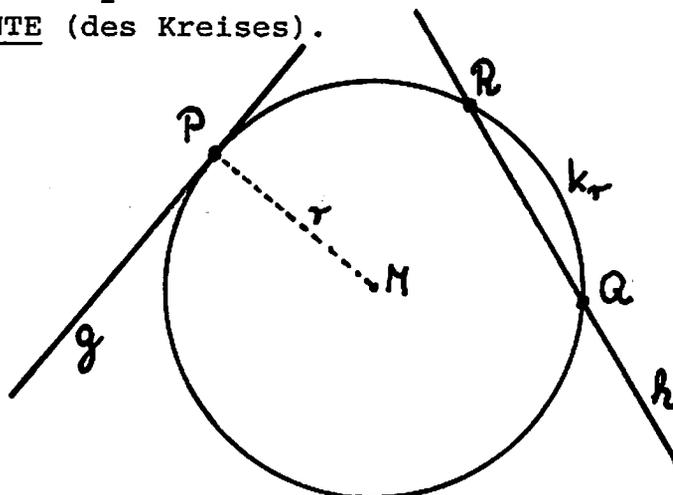
Aufgabe 7.2: Durch zwei ähnliche Dreiecke in E sei eine Ähnlichkeitsabbildung $\alpha: E \dashrightarrow E$ gegeben. Man konstruiere zu einem gegebenen Kreis $k_r \subset E$ das Bild αk_r .

Hinweis: Man zeige zuerst, daß das Bild wieder ein Kreis ist.

Definition 7.2:

Eine Gerade g , die genau einen Punkt mit dem Kreis k_r gemeinsam hat, heißt TANGENTE (an den Kreis).

Eine Gerade h , die k_r (gemäß Satz 7.3 genau zweimal) schneidet, heißt SEKANTE (des Kreises).



- g: Tangente
- h: Sekante

Satz 7.4:

Die Gerade g schneide den Kreis k_r im Punkte P . M sei der Kreismittelpunkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) g ist Tangente an k_r ,
- (2) g ist senkrecht zur Geraden MP , d.h. $g \perp MP$.

Beweis:

(1) \Rightarrow (2) :

Wir fällen von M aus das Lot l auf g und führen die Spiegelung γ_l an l durch.

Dabei geht der Kreis k_r aus Symmetrieeigenschaften in sich über (s.Satz 7.2). Aus Symmetriegründen geht auch g in sich über (Satz 3.3, Seite 3.6).

Da das Bild des einzigen Schnittpunktes P von k_r und g wieder ein Schnittpunkt sein muß, gilt: $\gamma_l P = P$. Daraus folgt $P \in l$, und es ist $MP = l \perp g$.

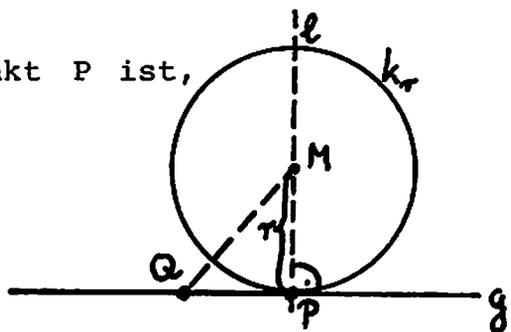
(2) \Rightarrow (1) :

Da MP das Lot auf g mit dem Fußpunkt P ist, gilt für jeden anderen Punkt

$Q \in g$ (nach Satz 4.6, Seite 4.3):

$$d(M, Q) > d(M, P) = r.$$

Demnach kann nur $Q \notin k_r$ gelten.

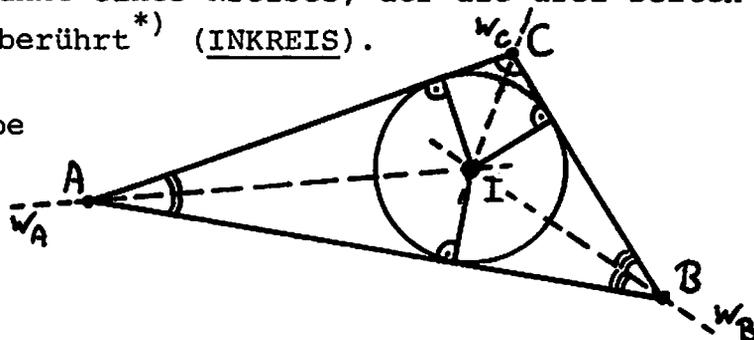


Bemerkung: Man sagt, eine Gerade berührt einen Kreis, wenn sie Tangente an ihn ist.

Satz 7.5:

In jedem Dreieck ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden Mittelpunkt eines Kreises, der die drei Seiten (vgl.Def.4.1) berührt*) (INKREIS).

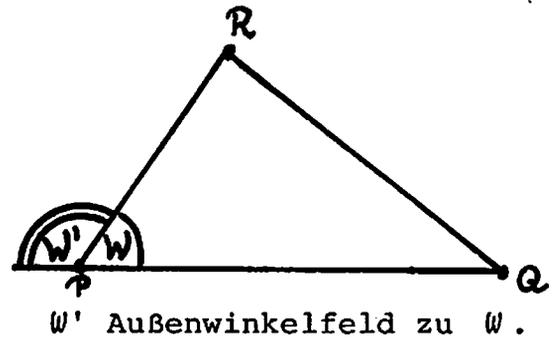
Beweis: Aufgabe



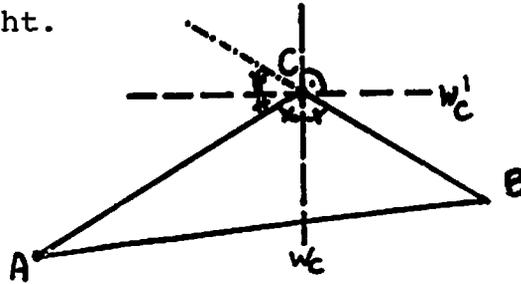
*) Das Berühren einer Seite ist analog der obigen Bem. zu verstehen.

Definition 7.3:

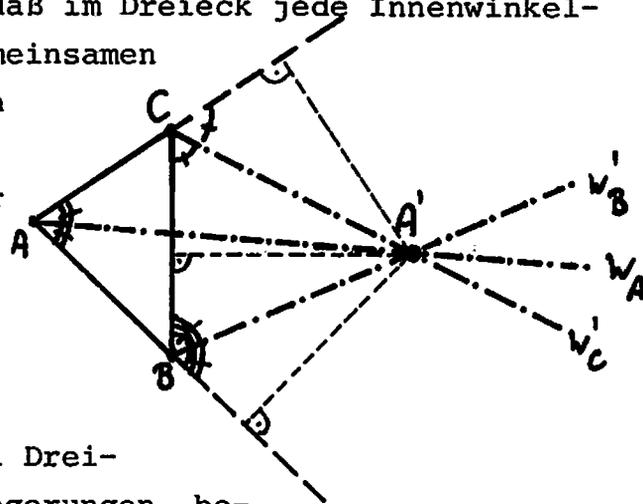
Ein Nebenwinkelfeld eines Innenwinkelfeldes eines Dreiecks heißt ein (anliegendes) AUSSENWINKELFELD.



Aufgabe 7.3: Man beweise, daß im Dreieck jede Innenwinkelhalbierende auf der Halbierenden eines anliegenden Außenwinkelfeldes senkrecht steht.



Aufgabe 7.4: Man beweise, daß im Dreieck jede Innenwinkelhalbierende genau einen gemeinsamen Schnittpunkt mit den beiden Halbierenden der nicht anliegenden Außenwinkelfelder hat.



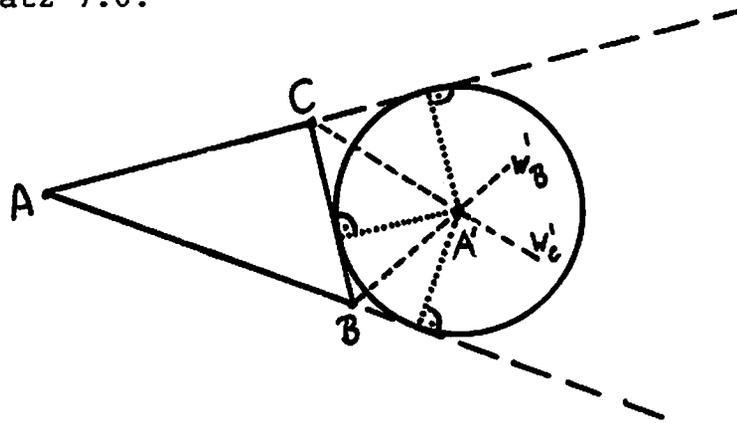
Anl: Man gehe aus vom Schnittpunkt A' zweier Außenwinkelhalbierender, fälle die Lote auf die drei Dreiecksseiten bzw. ihre Verlängerungen, begründe, daß die an A' grenzenden Abschnitte der Lote gleich lang sind und schließe, daß deshalb die von der dritten Dreiecksseite A durch A' gezogene Transversale die Innenwinkelhalbierende bei A sein muß.

Aus dem Beweis der Aufgabe 7.4 ergibt sich der

Satz 7.6:

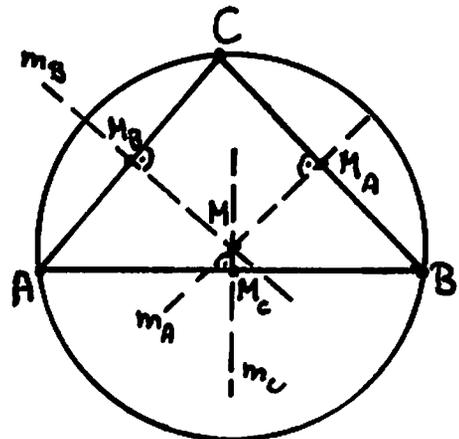
Der Schnittpunkt zweier Außenwinkelhalbierender eines Dreiecks ist Mittelpunkt eines Kreises, der eine Seite des Dreiecks und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten berührt (ANKREIS).

Skizze zu Satz 7.6:



Satz 7.7:

Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks ist der Mittelpunkt eines Kreises durch die drei Ecken des Dreiecks (UMKREIS).



Beweis: Aufgabe

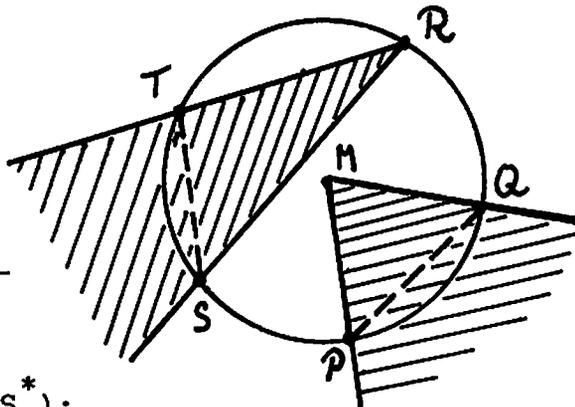
Definition 7.4:

In einem Kreis heißt ein Winkelfeld über einer Sehne dieses Kreises, dessen Scheitel auf dem Kreis liegt, ein PERIPHERIEWINKELFELD. Ein Winkelfeld über einer Sehne, dessen Scheitel im Kreismittelpunkt liegt, heißt ein ZENTRUMSWINKELFELD.

Skizze:

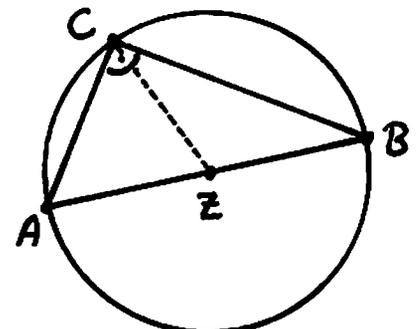
*SRT : Peripheriewinkelfeld

*PMQ : Zentrums-winkelfeld



Satz 7.8 (von THALES*):

- (a) Man beweise, daß im Kreis jedes Peripheriewinkelfeld über einem Durchmesser ein rechtes ist.
- (b) Man beweise, daß beim rechtwinkligen Dreieck der Kreis mit der Hypotenuse



*) Thales von Milet um ca. -600

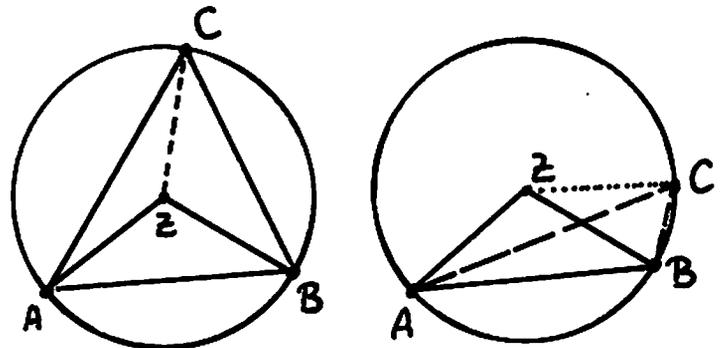
als Durchmesser den Scheitelpunkt des rechten Winkelfeldes trifft.

Beweis: Aufgabe

Hinweis zu (a): Man betrachte die Dreiecke $\{A,Z,C\}$ und $\{C,Z,B\}$ und beachte die Sätze 4.2 (S.4.1) und 4.20 (S.4.16)
zu (b): Verwende Satz 7.7 und zeige
 $\{Z\} = m_A \cap m_B \cap m_C$.

Satz 7.9 (ZENTRUMSWINKEL-PERIPHERIEWINKEL-SATZ):

Im Kreis ist jedes Peripheriewinkelfeld über derselben Sehne halb so groß wie das zugehörige Zentrumswinkelfeld.

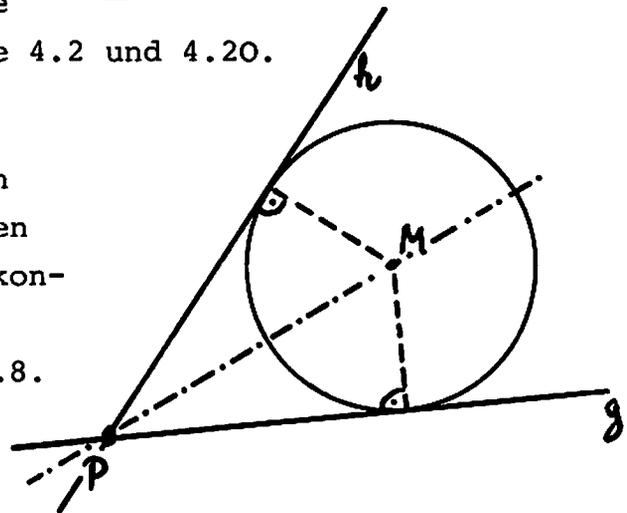


Beweis: Aufgabe

Hinweis: Man beachte die Fallunterscheidungen gemäß nebenstehender Skizze und benutze die Sätze 4.2 und 4.20.

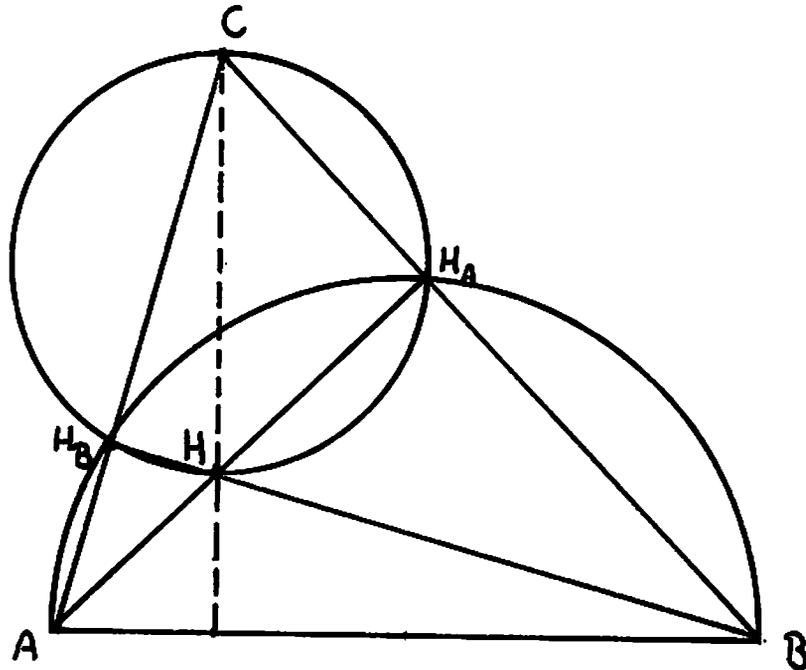
Aufgabe 7.5: Man lege durch einen gegebenen Punkt an einen gegebenen Kreis die Tangenten (Berührungspunkt-konstruktion - vgl.Satz 7.4)

Hinweis: Beachte Sätze 7.4 und 7.8.



Aufgabe 7.6: Man beweise, daß in der Figur auf Seite 7.7 oben $CH \perp AB$ gilt, d.h. daß die drei Höhen des Dreiecks $\{A,B,C\}$ sich in einem Punkt, H, schneiden.

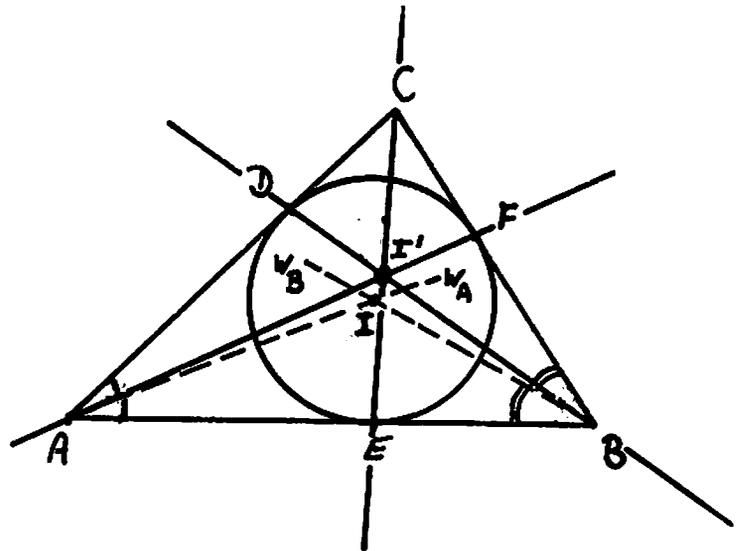
Skizze zu Aufgabe 7.6:



Satz 7.10:

In jedem Dreieck schneiden sich die drei Transversalen durch die Ecken und die Berührungspunkte des Inkreises in einem Punkt.

Beweisanleitung: Man verwende die Umkehrung des Satzes von CEVA und zeige somit: $AF \cap BD \cap CE = \{I'\}$.



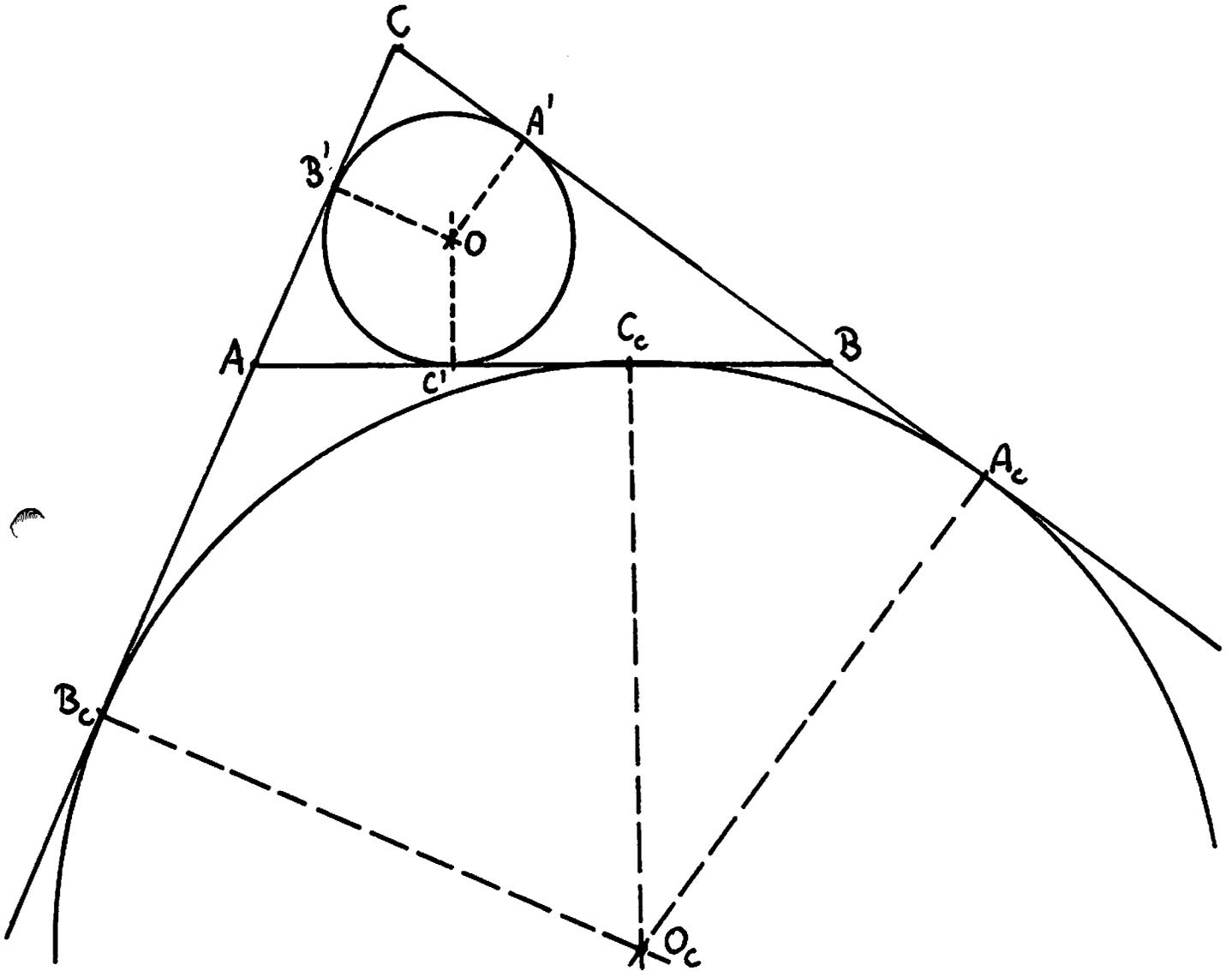
Aufgabe 7.7: Man betrachte die Figur auf Seite 7.8 oben.

Es sei $s = \frac{d(A,B)+d(B,C)+d(C,A)}{2}$. Man beweise:

- (1) $d(C,A)+d(A,C_c) = d(C,B)+d(B,C_c) = s$,
- (2) $d(A,C') = d(B,C_c) = d(B,A_c) = s-d(C,B)$.

Anmerkung: Entsprechende Beziehungen gelten für die übrigen Ankreise.

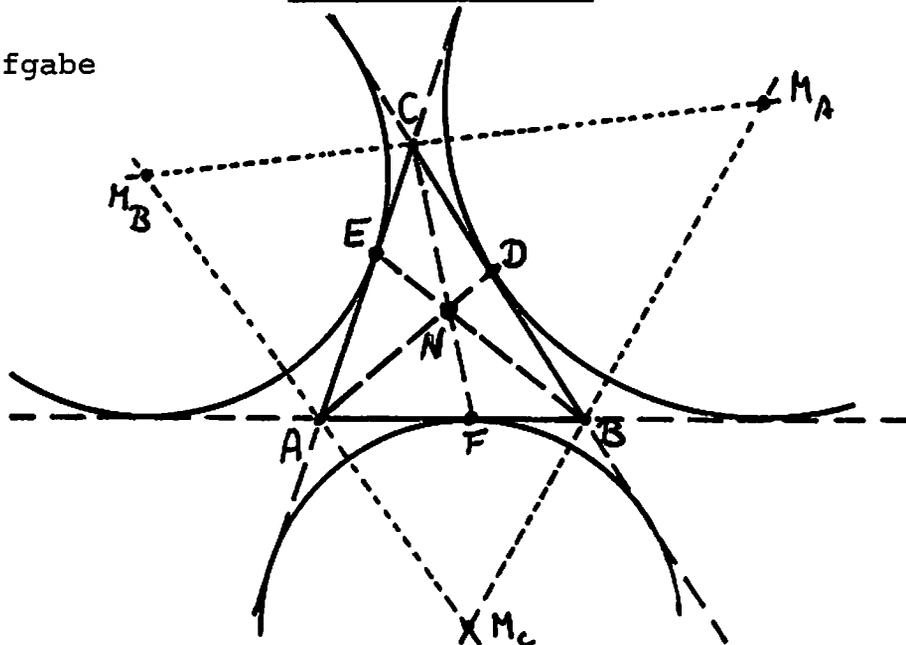
Skizze zu Aufgabe 7.7:



Satz 7.11:

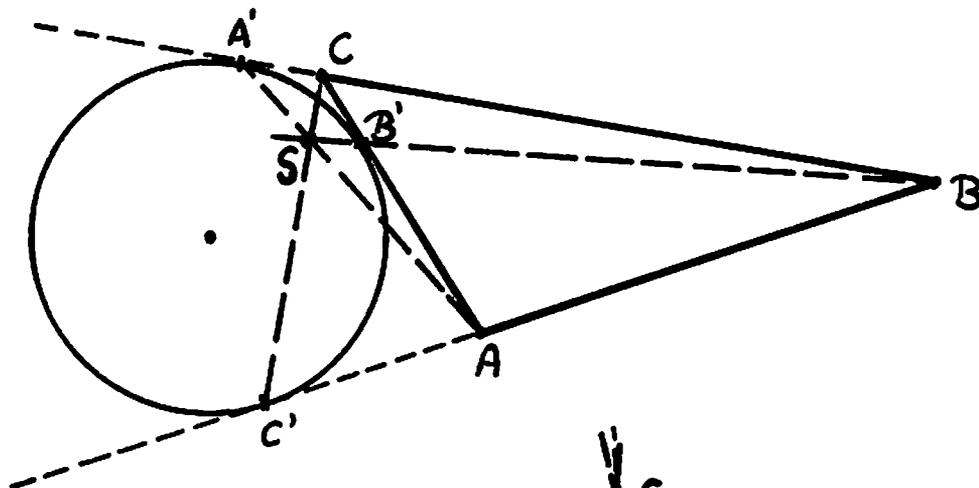
In jedem Dreieck schneiden sich die drei Transversalen durch die Ecken und die 3 Seitenberührungspunkte der Ankreise in einem Punkt (NAGELscher PUNKT).

Beweis: Aufgabe



Satz 7.12:

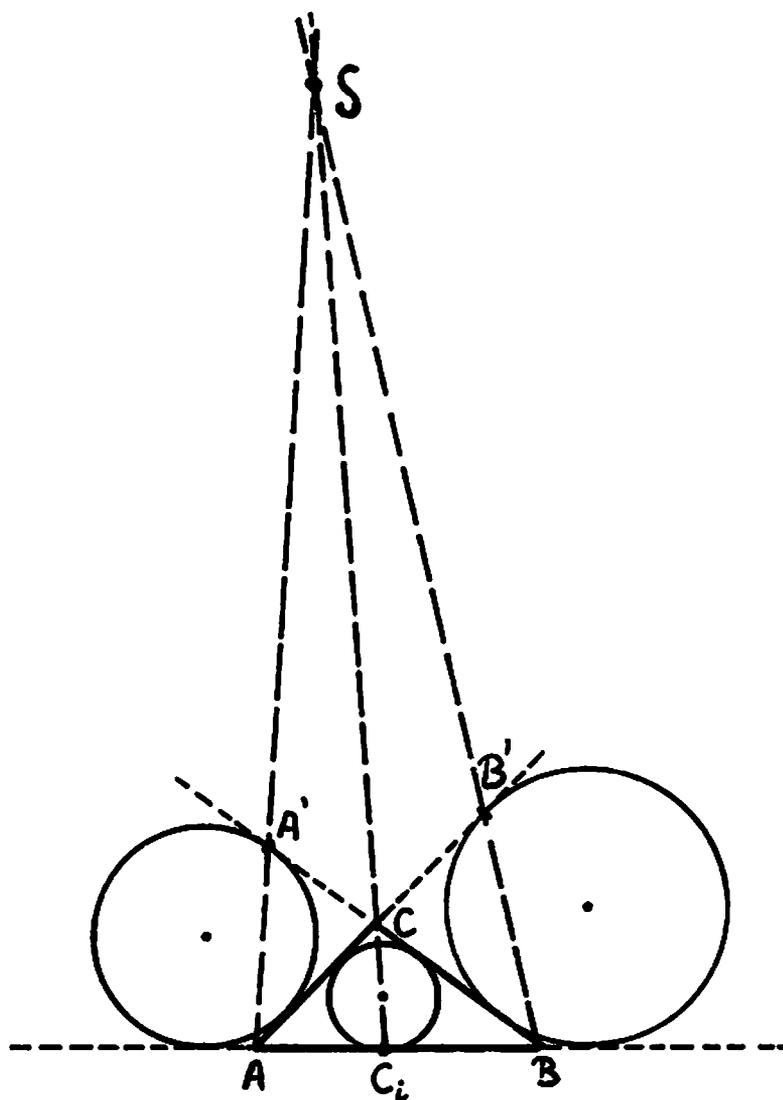
In jedem Dreieck schneiden sich die drei durch die Ecken und die Seitenberührungspunkte eines Ankreises bestimmten Transversalen in einem Punkt (s. Abb.).



Beweis: Aufgabe

Aufgabe 7.8: Im Dreieck A, B, C lege man gemäß nebenstehender Abbildung 3 Transversalen, und zwar

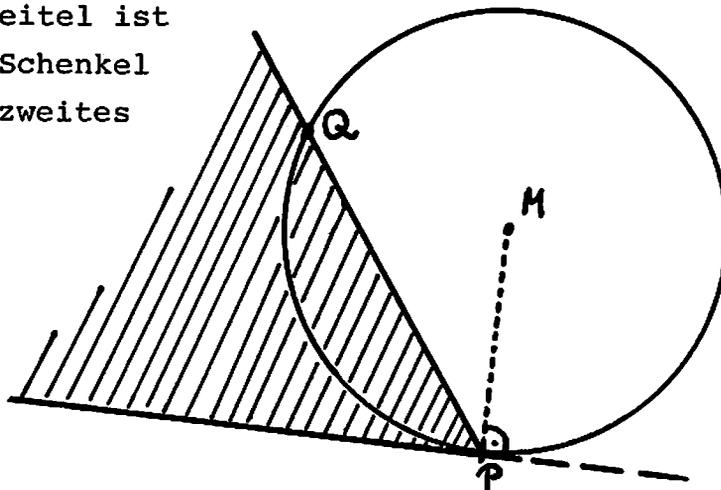
1. durch A und den Berührungspunkt A' auf BC vom Ankreis an die Seite \overline{AC} ;
2. durch B und den Berührungspunkt B' auf AC vom Ankreis an die Seite \overline{BC} ;
3. durch C und den Berührungspunkt C_i des Inkreises mit der Seite \overline{AB} .



Man beweise, daß die drei Transversalen sich in einem Punkt schneiden.

Definition 7.5:

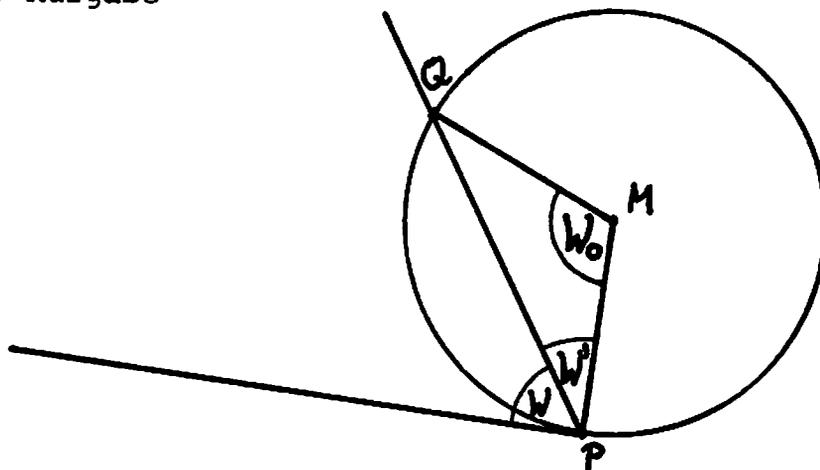
Ein SEHNENTANGENTENWINKELFELD eines Kreises ist ein Winkel­feld, dessen Scheitel auf dem Kreis liegt, dessen einer Schenkel eine Halbgerade der Tangente an den Kreis im Scheitel ist und dessen anderer Schenkel den Kreis noch ein zweites Mal schneidet.



Satz 7.13 (SEHNENTANGENTENWINKELSATZ):

Jedes Sehnentangentenwinkelfeld eines Kreises ist halb so groß wie das Zentrumswinkelfeld über dem Kreisbogen, der im Sehnentangentenwinkelfeld liegt (vgl. Satz 7.9).

Beweis: Aufgabe

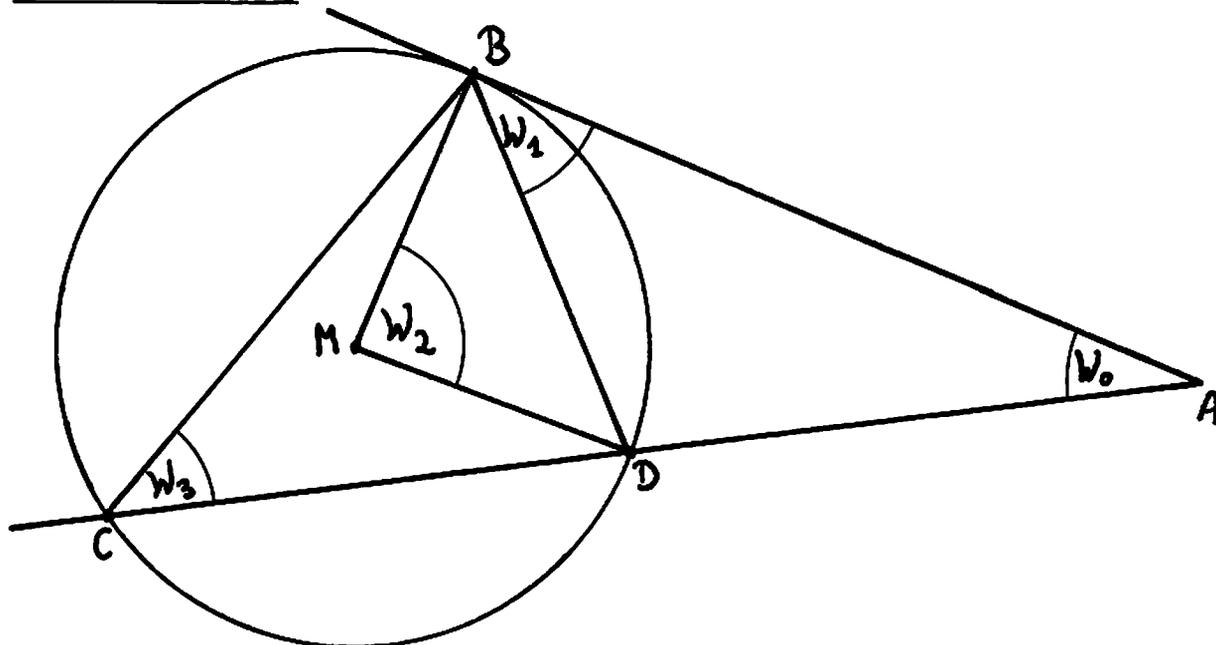


Satz 7.14 (SEHNENTANGENTENSATZ):

Schneiden sich eine Tangente und eine Sekante eines Kreises in einem Punkt, so ist das Produkt der von dem Punkt aus

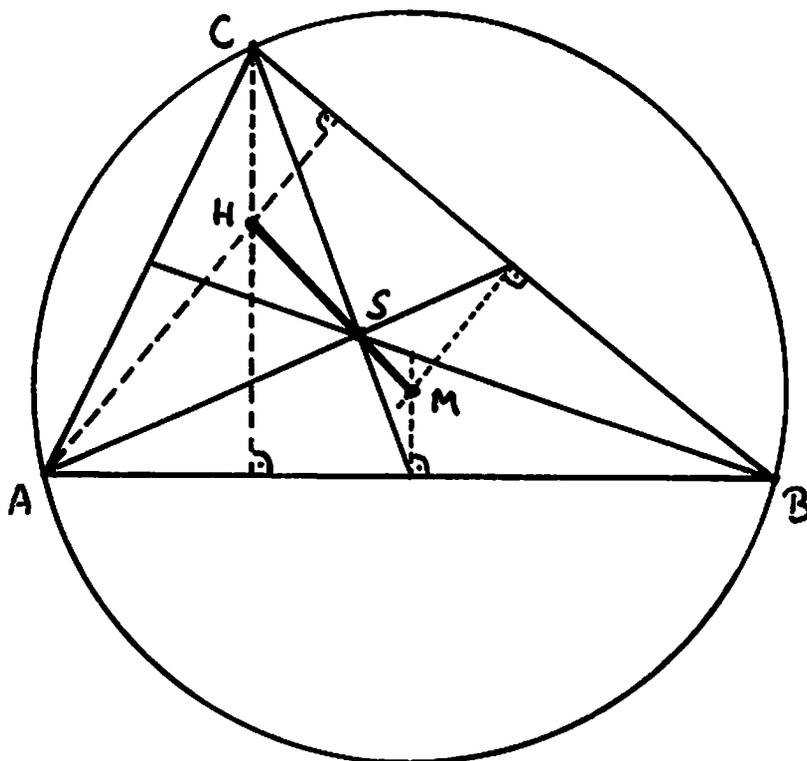
gemessenen Längen der Sekantenabschnitte gleich dem Quadrat der Länge des Tangentenabschnitts.

Beweisanleitung:



Man begründe die Ähnlichkeit der Dreiecke $\{A,B,C\}$ und $\{A,D,B\}$ durch Vergleich der Größen der Winkelfelder w_1 und w_2 sowie w_2 und w_3 .

Aufgabe 7.9: Auf den Umkreis eines Dreiecks $\{A,B,C\}$ wende man die Streckung σ_S mit dem Schwerpunkt S als Streckzentrum und mit $k = -\frac{1}{2}$ als Streckfaktor an.



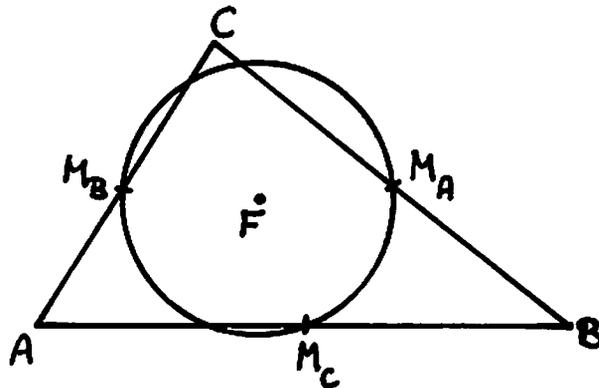
Wie verläuft der Bildkreis des Umkreises unter σ_S ?
Wo liegt (unter genauer quantitativer Angabe) sein Mittelpunkt F ?

Aufgabe 7.10: Man beweise den Lehrsatz des Pythagoras (Satz 6.12, Seite 6.8) mit Hilfe des Sehnentangentensatzes.

Anl: Man lege durch eine geeignete Ecke des Dreiecks einen Kreis mit entsprechend zu wählendem Radius.

Definition 7.6:

Der Kreis durch die drei Seitenmitten eines Dreiecks heißt FEUERBACHScher KREIS.



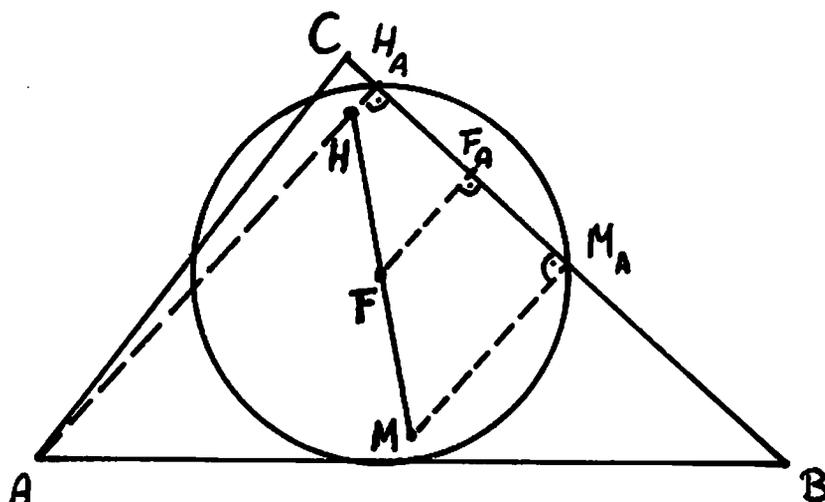
Bemerkung: Der Mittelpunkt F des Feuerbachschen Kreises halbiert die Strecke \overline{HM} der Eulerschen Geraden.
(Beachte Aufgabe 7.9 !)

Satz 7.15:

Auf dem Feuerbachschen Kreis eines Dreiecks liegen die drei Höhenfußpunkte^{*)} des Dreiecks.

^{*)} In einem Dreieck heißt der Schnittpunkt einer Höhe mit der zu dieser senkrechten Seite (oder ihrer Verlängerung) ein HÖHENFUßPUNKT.

Beweis:



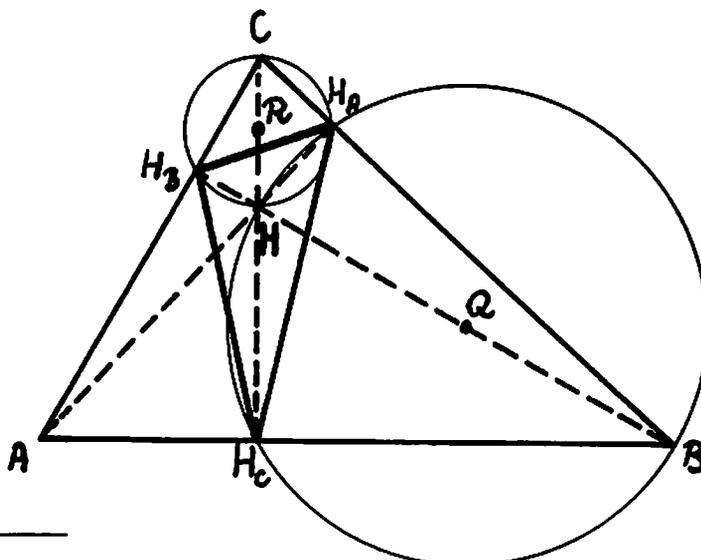
Da F nach der Bemerkung von Seite 7.12 die Strecke \overline{HM} halbiert, halbiert der Lotfußpunkt F_A die Strecke $\overline{M_A H_A}$. Ein Lot durch den Kreismittelpunkt auf eine Kreissehne trifft diese in der Mitte (Symmetrieeigenschaft).

Da M_A Kreispunkt ist, muß wegen $d(M_A, F_A) = d(F_A, H_A)$ auch H_A ein Kreispunkt sein.

Analog schließt man bezüglich der anderen Höhenfußpunkte.

Satz 7.16:

In jedem spitzwinkligen*) Dreieck sind die Höhen die Winkelhalbierenden des zugehörigen Höhenfußpunktdreiecks.



*) das ist ein Dreieck mit Winkelmaß < 90 für jedes der drei Innenwinkelfelder.

Beweishilfen:

Um den Satz für die Höhe durch A zu beweisen, begründe man, daß

1. der Kreis mit \overline{HB} als Durchmesser die Höhenfußpunkte H_A und H_C enthält und daß der Kreis mit \overline{HC} als Durchmesser die Höhenfußpunkte H_A und H_B enthält;
2. $\omega(\angle H H_A H_B) = \omega(\angle H C H_B)$ ist (Satz 7.9);
3. $\omega(\angle H_C B H) = \omega(\angle H C H_B)$ ist (Ähnlichkeit der Dreiecke $\{A, B, H_B\}$ und $\{A, C, H_C\}$);
4. $\omega(\angle H_C B H) = \omega(\angle H_C H_A H)$ ist (Satz 7.9).

Dann ist nämlich $\omega(\angle H H_A H_B) = \omega(\angle H_C H_A H)$.

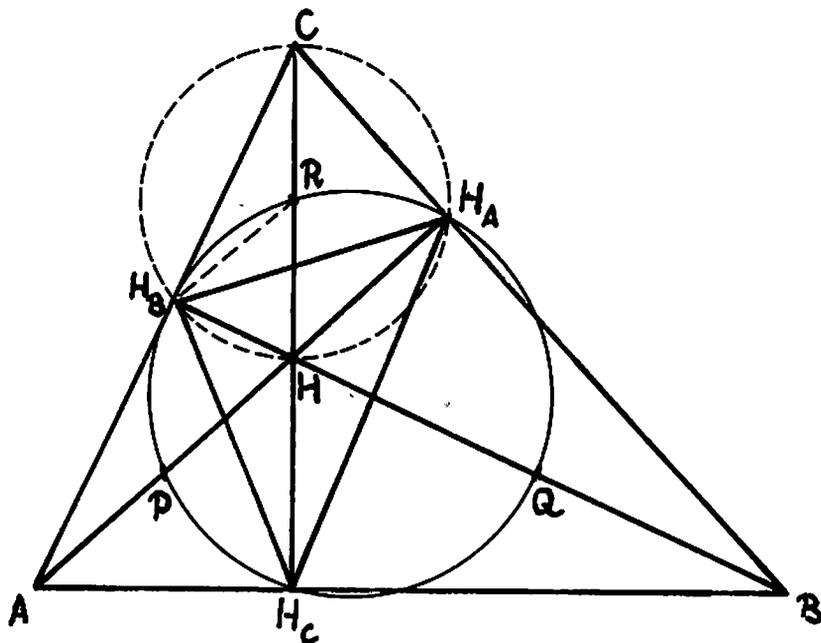
Im Falle der beiden anderen Höhen schließt man analog.

Bemerkung: Enthält das Dreieck A, B, C ein stumpfes Winkelmaß ω ($\omega(\omega) > 90$), so sind zwei seiner Höhen Außenwinkelhalbierende des Höhenfußpunktdreiecks (man zeichne den Sachverhalt).

Satz 7.17:

Der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks enthält die Mitten der Höhenabschnitte zwischen den Ecken und dem Höhenschnittpunkt.

Beweis für die Höhe durch C:



R sei der Mittelpunkt des Kreises mit \overline{CH} als Durchmesser. Auf diesem Kreis liegen H_B und H_A . Das Winkelfeld $\angle H_B RH$ ist als Zentrumswinkelfeld dieses Kreises doppelt so groß wie das Peripheriewinkelfeld $\angle H_B H_A H$ über demselben Bogen:

$$\omega(\angle H_B RH) = 2 \cdot \omega(\angle H_B H_A H) .$$

Da die Höhen Winkelhalbierende im Fußpunktendreieck sind, ist demnach das Winkelfeld $\angle H_B RH$ genau so groß wie das Winkelfeld $\angle H_B H_A H_C$:

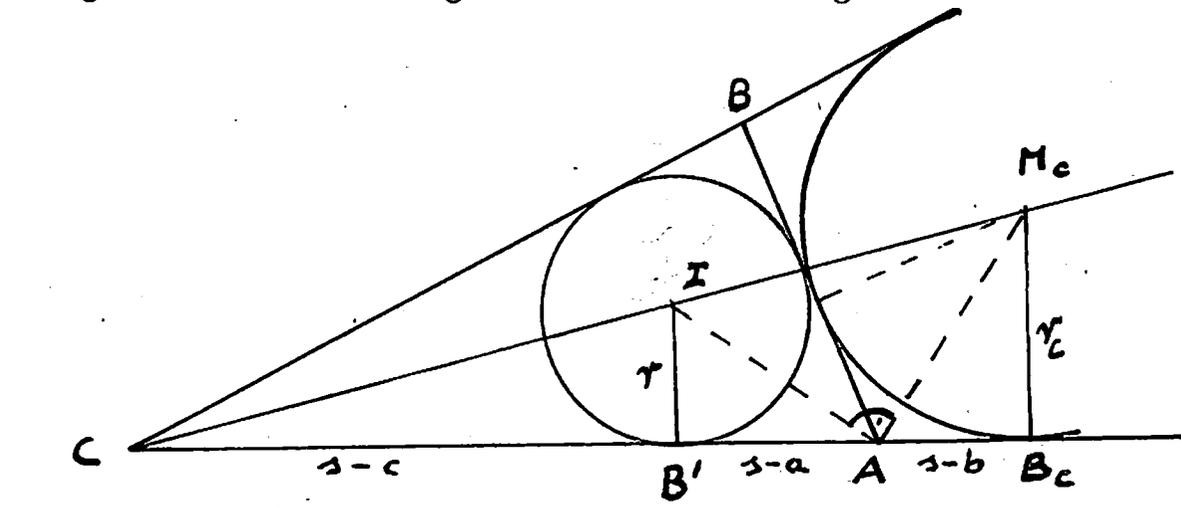
$$\omega(\angle H_B RH) = \omega(\angle H_B H_A H_C) .$$

Beide können auch als Winkelfelder über demselben Bogen $H_B H_C$ des Feuerbachschen Kreises aufgefaßt werden. Da $\angle H_B H_A H_C$ hier ein Peripheriewinkelfeld ist, muß der Scheitel R des gleich großen Winkelfeldes $\angle H_B RH_C$ ebenfalls auf dem Feuerbachkreis liegen (anderenfalls ergäbe sich ein Widerspruch zum Zentrums-Peripheriewinkelsatz).

Bemerkung: Der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks enthält die drei Seitenmitten, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mitten der durch die Ecken und den Höhenschnittpunkt begrenzten Strecken. Der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises halbiert die Strecke zwischen dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und dem Höhenschnittpunkt.

Abschließend wenden wir uns zwei weiteren Themen zu.

Der folgenden Inkreis-Ankreis-Figur entnehmen wir zwei Längenverhältnisse.



$$\frac{r}{s-c} = \frac{r_c}{s} \quad (\text{STRAHLENSATZ}) .$$

Dabei ist s die Länge des halben Umfangs des Dreiecks $\{A, B, C\}$ und a, b, c sind die Längen der Seiten.

$$\frac{r}{s-a} = \frac{s-b}{r_c} \quad (\{I, B', A\} \cong \{A, B_c, M_c\}) .$$

Daraus folgt

$$r^2 = \frac{(s-c)(s-a)(s-b)}{s} ,$$

also die Berechnung des Inkreisradius aus den Längen der Seiten.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} r^2 s^2 &= s(s-a)(s-b)(s-c) \\ rs &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{aligned}$$

Nun ist $I(\Delta) = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2} = rs$ der Inhalt der Dreiecksfläche (§§ 8 und 9).

Damit gilt

Satz 7.18:

$$I(\Delta) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{HERONISCHE}^1 \text{ DREIECKSFORMEL}).$$

In Kreise lassen sich regelmäßige Vielecke einbeschreiben. Es ist leicht, für das Quadrat und für das Sechseck Lösungen zu finden, bei denen man mit „Zirkel und Lineal“ auskommt. Damit sind sofort auch Lösungen für das Dreieck und das Achteck gegeben. Wie steht es aber mit dem 5-, 10-, 7- und 9-Eck?

Diese Frage wollen wir für die beiden ersteren beantworten. Dazu führen wir einen zweckdienlichen Begriff ein.

Definition 7.7:

Eine Strecke \overline{AB} heißt nach dem GOLDENEN SCHNITT geteilt, wenn ihre Länge sich zu der des größeren Teils genauso verhält wie die des größeren Teils zu der des kleineren:

$$\frac{d(A,B)}{d(A,T)} = \frac{d(A,T)}{d(T,B)}$$

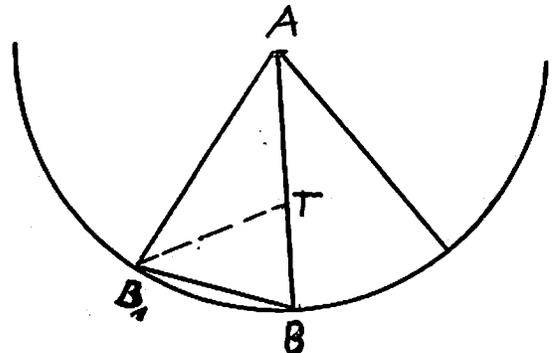


Satz 7.19:

Jede Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks ist so lang wie der größere Teil des nach dem GOLDENEN SCHNITT geteilten Radius:

$$d(B_1, B) = d(A, T).$$

Beweis: Aufgabe (vgl. Abb.).



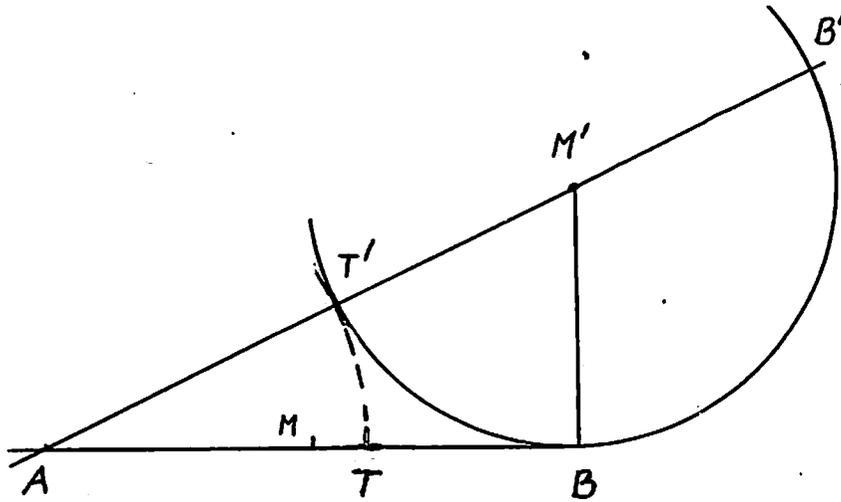
Bemerkung:

Mit Satz 19 ist das Problem auch für das Fünfeck erledigt. Für das 7- und das 9-Eck gibt es kein nur mit Zirkel und Lineal auskommendes Verfahren.

Zur Konstruktion eines regelmäßigen Zehnecks muß man eine Strecke elementargeometrisch

¹HERON von Alexandria (um +100)

nach dem Goldenen Schnitt teilen können. Ein praktisches Verfahren dafür ist im Sekantentangentensatz (Satz 14) „versteckt“:



\overline{AB} sei zu teilen:

- (1) Mittelpunkt M , $MB \perp M'B$, $d(M', B) = d(M, B)$.
- (2) AM' schneidet den Kreis um M' in T' und in B' .
- (3) $d(T', B') = d(A, B)$ nach Konstruktion.
- (4) T' teilt $\overline{AB'}$ im Goldenen Schnitt nach dem Sekantentangentensatz (Satz 14):

$$\frac{d(A, B')}{d(A, B)} = \frac{d(A, B)}{d(A, T')}$$

$$\frac{d(A, B')}{d(T', B')} = \frac{d(T', B')}{d(A, T')}$$

$$(5) \frac{d(A, B')}{d(T', B')} - 1 = \frac{d(T', B')}{d(A, T')} - 1$$

$$\frac{d(A, B') - d(T', B')}{d(T', B')} = \frac{d(T', B') - d(A, T')}{d(A, T')} \quad \left(= \frac{d(A, B) - d(A, T)}{d(A, T)} \right)$$

Es folgt

$$\frac{d(A, T)}{d(A, B)} = \frac{d(T, B)}{d(A, T)}$$

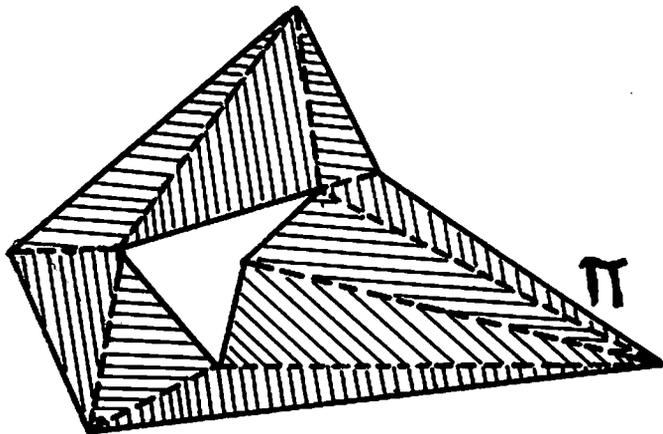
Damit teilt T die Strecke \overline{AB} nach dem Goldenen Schnitt.

§8 Zerlegungsgleichheit

Dieses Kapitel enthält Vorüberlegungen dazu, jeder Polygonfläche (Vieleckfläche) eine positive reelle Zahl als Flächeninhalt zuzuordnen.

Definition 8.1:

Eine Punktmenge Π heißt eine POLYGONFLÄCHE, wenn sie in Dreiecksflächen elementargeometrisch zerlegbar ist (s. Abb.)



Dem näheren Verständnis dieser Definition dienen die folgenden Begriffserklärungen:

Definition 8.2:

$$\Delta := \overline{H_A} \cap \overline{H_B} \cap \overline{H_C}$$

heißt FLÄCHE DES DREIECKS $\{A, B, C\}$, wenn $\overline{H_A}, \overline{H_B}, \overline{H_C}$ die abgeschlossenen Halbebenen zu den Geraden BC, CA, AB sind, welche A, B, C enthalten.

Die Vereinigung der Seiten des Dreiecks,

$$\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA},$$

heißt RAND, der Durchschnitt der offenen Halbebenen,

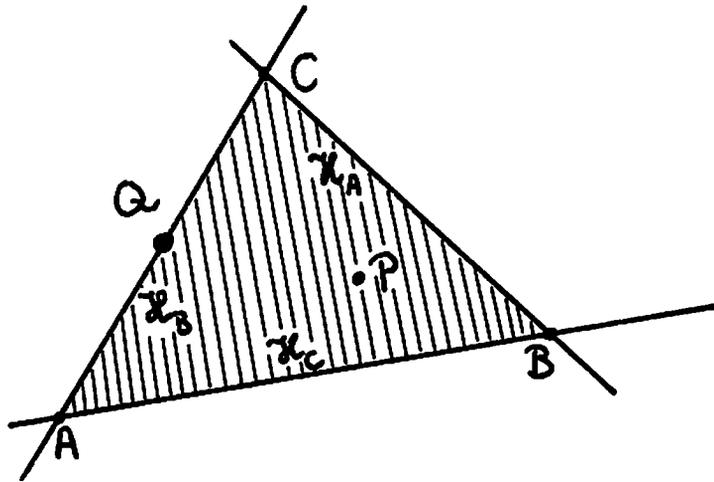
$$H_A \cap H_B \cap H_C,$$

INNERES des Dreiecks.

Die Punkte des Inneren heißen INNERE PUNKTE, die des Randes RANDPUNKTE der Dreiecksfläche.

P : innerer Punkt

Q : Randpunkt

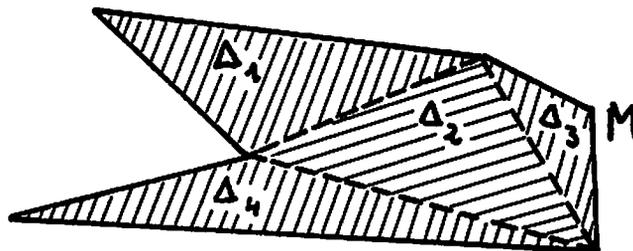


Definition 8.3:

Eine Punktmenge $M \subset E$ heißt ELEMENTARGEOMETRISCH ZERLEGT in die Dreiecksflächen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, wenn gilt:

(1) $M = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$

(2) $\Delta_i \cap \Delta_k$ besteht für $i \neq k$ höchstens aus Randpunkten.

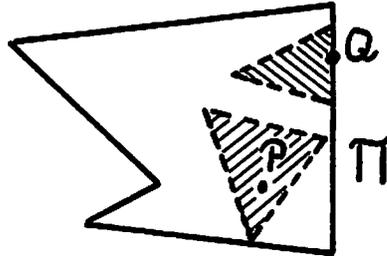


Bemerkung: Elementargeometrische Zerlegungen sind von den Zerlegungen im mengentheoretischen Sinne dadurch unterschieden, daß für $i \neq k$ nicht unbedingt $\Delta_i \cap \Delta_k = \emptyset$ verlangt wird.

Definition 8.4:

Π sei eine Polygonfläche.

$P \in E$ heißt INNERER PUNKT von Π , wenn es eine in Π enthaltene Dreiecksfläche Δ gibt, von der P ein innerer Punkt ist. $P \in E$ heißt RANDPUNKT von Π , wenn P von jeder in Π enthaltenen Dreiecksfläche Δ höchstens ein Randpunkt ist.



P: innerer Punkt
Q: Randpunkt

Satz 8.1:

Die Vereinigung zweier Polygonflächen, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben, ist eine Polygonfläche.

Beweis:

Die Zerlegungen^{*)} der beiden Polygonflächen seien

$$\Pi = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_m \quad ,$$

$$\Pi' = \Delta'_1 \cup \Delta'_2 \cup \dots \cup \Delta'_n \quad .$$

Wir haben zu zeigen, daß

$$\Pi \cup \Pi' = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_m \cup \Delta'_1 \cup \dots \cup \Delta'_n$$

eine Zerlegung in Dreiecksflächen darstellt:

Wegen

$$\begin{aligned} \Pi \cap \Pi' &= (\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_m) \cap (\Delta'_1 \cup \dots \cup \Delta'_n) \\ &= (\Delta_1 \cap \Delta'_1) \cup (\Delta_1 \cap \Delta'_2) \cup \dots \cup (\Delta_m \cap \Delta'_n) \end{aligned}$$

gilt $\Delta_i \cap \Delta'_k \subset \Pi \cap \Pi'$ für $i=1, \dots, m$ und $k=1, \dots, n$.

Deshalb ist - sofern $\Delta_i \cap \Delta'_k \neq \emptyset$ ist - jeder Punkt $P \in \Delta_i \cap \Delta'_k$ ein Randpunkt der Polygonflächen und wegen

$$P \in \Delta_i \subset \Pi \quad \text{und} \quad P \in \Delta'_k \subset \Pi'$$

nach Definition 8.4 auch Randpunkt von Δ_i und von Δ'_k . Beide Dreiecksflächen haben daher höchstens Randpunkte gemeinsam.

*) Der Zusatz "elementargeometrisch" wird hier und im folgenden weggelassen.

Da für $i \neq k$ auch Δ_i und Δ_k bzw. Δ'_i und Δ'_k höchstens Randpunkte gemeinsam haben, ist

$$\Pi \cup \Pi' = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta'_n$$

eine Zerlegung in Dreiecksflächen.

Aufgabe 8.1: Man beweise, daß der Durchschnitt zweier Dreiecksflächen, die einen gemeinsamen inneren Punkt besitzen, eine konvexe Polygonfläche bildet.

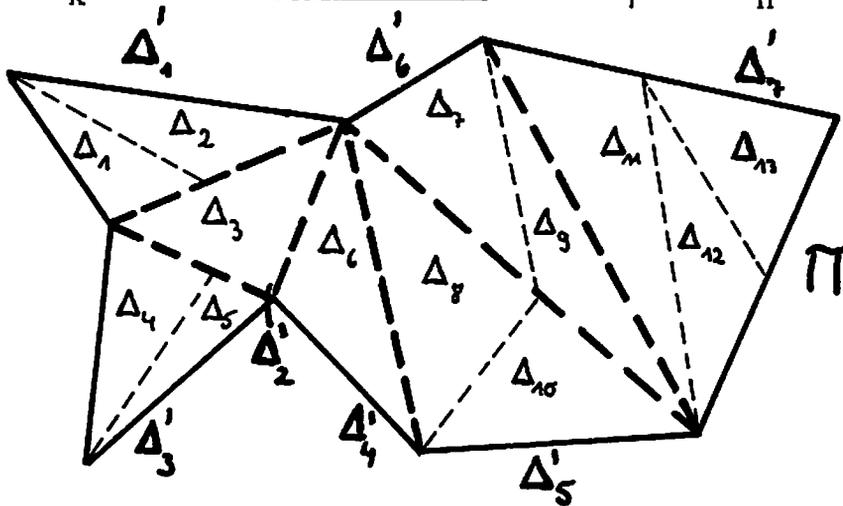
Aufgabe 8.2: Man zeige, daß der Durchschnitt zweier Dreiecksflächen, die keinen gemeinsamen inneren Punkt besitzen, entweder eine Strecke oder einpunktig oder leer ist.

Definition 8.5:

Eine Zerlegung $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ der Polygonfläche Π in Dreiecksflächen heißt FEINER als eine zweite Zerlegung $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_n\}$, wenn jede Dreiecksfläche Δ_i Teilmenge einer Dreiecksfläche Δ'_j ist, d.h. es gilt:

$$\begin{matrix} \wedge & \vee \\ i \in \{1, \dots, k\} & j \in \{1, \dots, n\} \end{matrix} \quad \Delta_i \subset \Delta'_j .$$

$\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ heißt VERFEINERUNG von $\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_n\}$.

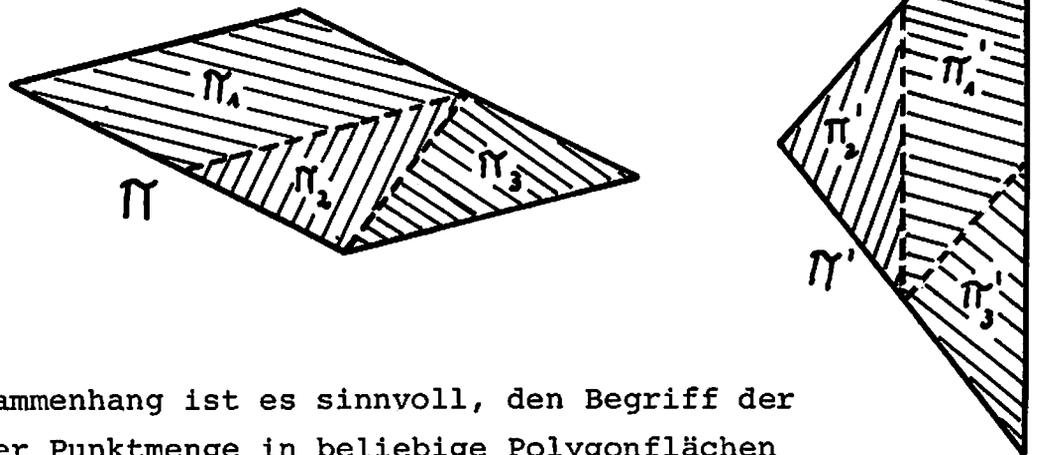


Satz 8.2:

Zu je zwei Zerlegungen einer Polygonfläche Π in Dreiecksflächen $\Delta_1', \dots, \Delta_n'$ bzw. $\Delta_1'', \dots, \Delta_m''$ gibt es eine gemeinsame Verfeinerung $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$.

Beweis: Aufgabe

Um zwei Polygonflächen zu vergleichen, versuchen wir, sie in zueinander kongruente Teilmengen zu zerlegen.



In diesem Zusammenhang ist es sinnvoll, den Begriff der Zerlegung einer Punktmenge in beliebige Polygonflächen einzuführen.

Definition 8.6:

Eine Punktmenge $M \subset E$ heißt ELEMENTARGEOMETRISCH ZERLEGT in die Polygonflächen Π_1, \dots, Π_n , wenn gilt:

(1) $M = \bigcup_{i=1}^n \Pi_i$

(2) $\Pi_i \cap \Pi_k$ besteht für $i \neq k$ höchstens aus Randpunkten.

Aufgabe 8.3: Sei $\{\Pi_1, \dots, \Pi_n\}$ eine Zerlegung^{*)} der Polygonfläche Π in n Polygonflächen, deren jede wiederum in Polygonflächen $\Pi_{i1}, \dots, \Pi_{in}$ zerlegt sei.

Man beweise, daß die Gesamtheit der Polygonflächen, welche

^{*}) Das Wort "elementargeometrisch" lassen wir wieder weg.

die Zerlegungen aller Π_i bilden, eine Zerlegung von Π darstellt.

Nunmehr kommen wir zu dem oben angekündigten Polygonflächenvergleich:

Definition 8.7:

Eine Polygonfläche Π heißt zu einer Polygonfläche Π' ZERLEGUNGSGLEICH, $\Pi \stackrel{Z}{=} \Pi'$, wenn Π und Π' in endlich viele Polygonflächen Π_1, \dots, Π_n bzw. Π'_1, \dots, Π'_n zerlegbar sind, so daß die Kongruenzen $\Pi_i \cong \Pi'_i$, $i=1, \dots, n$ bestehen.

In der Definition 8.7 wird von Polygonflächen gesprochen, deren Bilder unter Kongruenzabbildungen wieder Polygonflächen sind. Allgemeiner gilt der

Satz 8.3:

Jedes ähnliche Bild einer Polygonfläche ist eine Polygonfläche.

Beweis: Aufgabe

Anl: Man zeige zuerst, daß die Bilder von Dreiecksflächen wieder Dreiecksflächen sind.

Aus dem Satz 8.3 ergibt sich speziell die

Folgerung 8.1:

Das Bild einer Dreiecksfläche unter einer Kongruenzabbildung ist die Fläche des Bilddreiecks.

Satz 8.4:

Zwei Polygonflächen Π und Π' sind genau dann zerlegungsgleich, wenn sie so in endlich viele Dreiecksflächen

$\Delta_1, \dots, \Delta_n$ bzw. $\Delta'_1, \dots, \Delta'_n$ zerlegbar sind, so daß die Kongruenzen $\Delta_i \equiv \Delta'_i$, $i=1, \dots, n$, bestehen.

Beweis:

(1) Besteht die Zerlegbarkeit mit $\Delta_i \equiv \Delta'_i$ für $i=1, \dots, n$, so ist die Zerlegungsgleichheit nach Def.8.7 gegeben.

(2) Sei nun $\Pi \stackrel{Z}{\equiv} \Pi'$.

Dann ist Π in Polygonflächen Π_1, \dots, Π_m und Π' in Polygonflächen Π'_1, \dots, Π'_m zerlegbar mit $\Pi_i \equiv \Pi'_i$ für $i=1, \dots, m$.

Nach Definition 8.1 ist jede Polygonfläche Π_i in Dreiecksflächen $\Delta_{i1}, \dots, \Delta_{im_i}$ zerlegbar.

Sei $\beta_i : E \rightarrow E$ diejenige Kongruenzabbildung, welche Π_i auf Π'_i abbildet. Dann gilt:

$$\Pi_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} \Delta_{ij}$$

$$\Pi'_i = \beta_i \Pi_i = \beta_i \bigcup_{j=1}^{m_i} \Delta_{ij} = \bigcup_{j=1}^{m_i} \beta_i \Delta_{ij}$$

$\{\beta_i \Delta_{i1}, \dots, \beta_i \Delta_{im_i}\}$ ist eine Zerlegung von Π'_i in Dreiecksflächen (nach einem Abschnitt des Beweises von Satz 8.3).

Nach Aufgabe 8.3 ist Π in die Dreiecksflächen

$$\Delta_{11}, \dots, \Delta_{1m_1}, \Delta_{21}, \dots, \Delta_{2m_2}, \dots, \Delta_{m1}, \dots, \Delta_{mm_m}$$

zerlegt und Π' deshalb in die Dreiecksflächen

$$\beta_1 \Delta_{11}, \dots, \beta_1 \Delta_{1m_1}, \beta_2 \Delta_{21}, \dots, \beta_2 \Delta_{2m_2}, \dots, \beta_m \Delta_{m1}, \dots, \beta_m \Delta_{mm_m}$$

Es gilt also:

$$\bigwedge_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^{m_i} \Delta_{ij} \equiv \beta_i \Delta_{ij}$$

Damit sind die im Satz behaupteten Kongruenzen abgeleitet. Nach geeigneter Umbenennung,

$$\Delta_{11} = \Delta_1, \Delta_{12} = \Delta_2, \dots, \Delta_{mm_m} = \Delta_n ;$$

$$\beta_1 \Delta_{11} = \Delta'_1, \beta_1 \Delta_{12} = \Delta'_2, \dots, \beta_m \Delta_{mm_m} = \Delta'_n ,$$

können wir sie auch in der Form

$$\bigwedge_{i=1}^n \Delta_i \equiv \Delta'_i$$

aussprechen.

Satz 8.5:

Die Zerlegungsgleichheit ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der Polygonflächen.

Beweis: Aufgabe

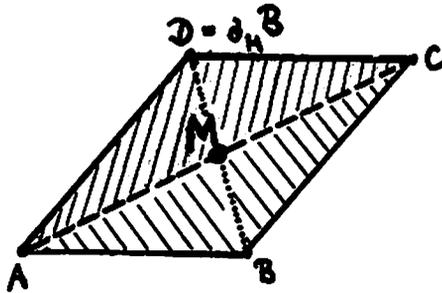
Definition 8.8:

Sei $\{A,B,C\}$ eine Dreieck und $D \in \overline{AC}$ der Bildpunkt von B bei der Punktspiegelung σ_M am Mittelpunkt M von \overline{AC} . Dann heißt die Vereinigung der beiden Dreiecksflächen

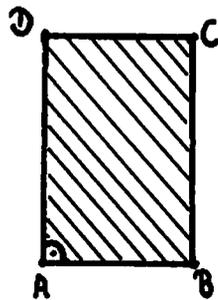
$$\Delta_{ABC} \cup \Delta_{ACD}$$

PARALLELOGRAMMFLÄCHE mit den Ecken A,B,C,D und den Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$.

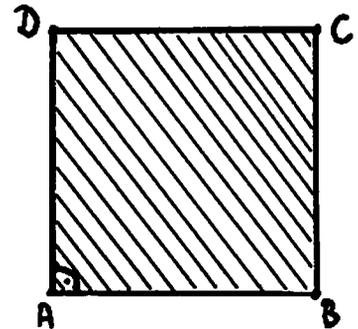
Sind zwei Seiten mit gemeinsamem Endpunkt zueinander senkrecht, spricht man von einer RECHTECKFLÄCHE, sind außerdem alle Seiten gleich lang, so nennt man die eingeschlossene Fläche eine QUADRATFLÄCHE.



Parallelogrammfläche



Rechteckfläche



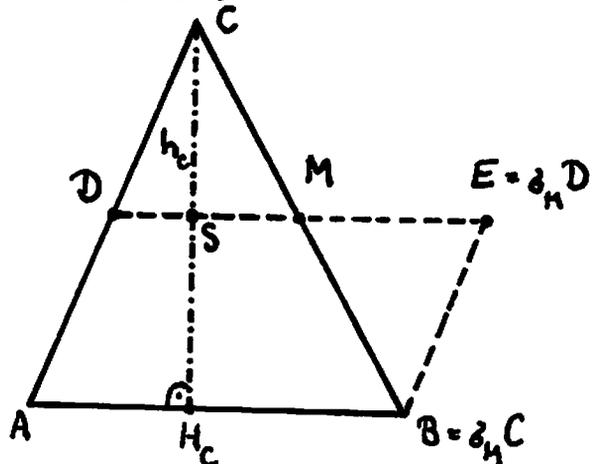
Quadratfläche

Satz 8.6:

Zu jeder Dreiecksfläche gibt es eine zerlegungsgleiche Parallelogrammfläche.

Beweis:

Gegeben sei das Dreieck $\{A,B,C\}$. Wir spiegeln den Mittelpunkt D von \overline{AC} am Mittelpunkt M von \overline{BC} und erhalten den Punkt E . Nach der Umkehrung des 1. Strah-



lensatzes (Satz 4.14, Seite 4.12) liegt E auf der Parallelen DM zu AB. Außerdem ist \overline{EB} als Bild von \overline{DC} unter der Punktspiegelung σ_M an M parallel zu \overline{DC} .

Demnach ist $\{A, B, E, D\}$ ein Parallelogramm.

Wegen $\sigma_M\{M, C, D\} = \{M, B, E\}$ sind die Dreieckfläche Δ_{ABC} und die Parallelogrammfläche Π_{ABED} zerlegungsgleich.

Nach dem 1. Strahlensatz (Satz 4.13, Seite 4.11) ist im Dreieck $\{A, B, C\}$ der Abschnitt der Höhe h_c durch C doppelt so lang wie der Abstand der Parallelogrammseite \overline{AB} von der dazu parallelen Seite \overline{DE} , d.h.

$$d(C, H_c) = 2 \cdot d(S, H_c) .$$

Satz 8.7:

Stimmen zwei Parallelogrammflächen in der Länge einer Seite und in der Länge des Höhenabschnitts*) zu dieser Seite überein, so sind sie zerlegungsgleich.

Beweis:

Es seien A, B, C, D und A', B', C', D' die Parallelogramme, und es sei $d(A, B) = d(A', B')$.

Wir bilden die beiden gleichlangen Seiten

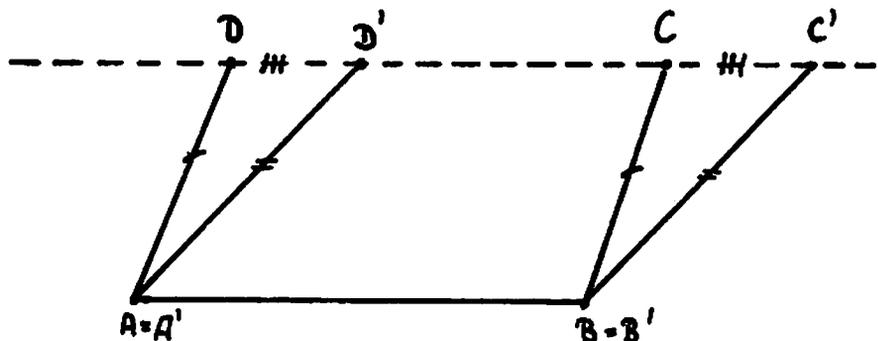
durch eine Kongruenzab-

bildung aufeinander ab, und zwar so, daß die beiden parallelen Seiten in dieselbe Gerade fallen.

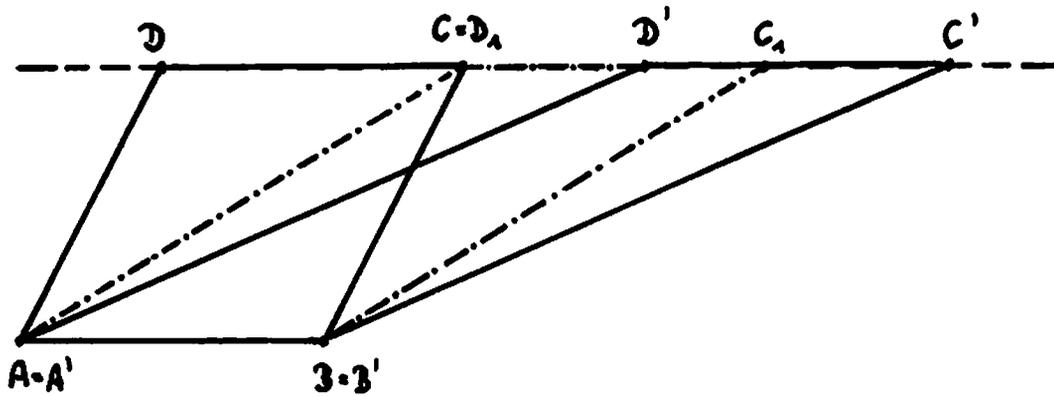
Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten:

(1) Der Durchschnitt der beiden in dieselbe Gerade abgebildeten Seiten ist nicht leer (s. Abb. oben). In diesem Fall ergibt sich die Zerlegungsgleichheit der Parallelogramme aus dem 1. Kongruenzsatz für Dreiecke (Satz 5.6, Seite 5.7).

(2) Der Durchschnitt der beiden in dieselbe Gerade abgebildeten Seiten ist leer: $\overline{DC} \cap \overline{D'C'} = \emptyset$
(s. Abb. auf Seite 8.10 oben)



*) Dies ist der Abstand dieser Seite von der zu ihr parallelen Seite.



Es sei $\overline{D'C'} \subset \overline{DC}$. Dann werden auf \overline{DC} so oft Strecken $\overline{D_1C_1}, \overline{D_2C_2}, \dots$ der Länge $d(D, C)$ nacheinander abgetragen, bis ein Endpunkt (in unserer Abbildung ist dies C_1) auf der Strecke $\overline{D'C'}$ liegt.

Nach (1) sind benachbarte Parallelogrammflächen zerlegungsgleich und wegen der Transitivität der Relation " \cong " sind dann auch die beiden Parallelogrammflächen, von denen wir ausgegangen sind, zerlegungsgleich.

Folgerung 8.2:

Zu jeder Parallelogrammfläche gibt es eine zerlegungsgleiche Rechteckfläche derart, daß beide Flächen in der Länge einer Seite übereinstimmen.

Begründung: Zu jeder Parallelogrammfläche läßt sich eine Rechteckfläche konstruieren, welche mit jener in der Länge einer Seite und in der Länge des zugehörigen Höhenabschnitts übereinstimmt.

Über den Satz 8.7 ergibt sich die

Folgerung 8.3:

Zwei Dreiecksflächen sind zerlegungsgleich, wenn sie in der Länge einer Seite und in der Länge des zugehörigen Höhenabschnitts übereinstimmen.

Aufgabe 8.4: Man zeige, daß jede Rechteckfläche zu einer Rechteckfläche, bei der die Länge einer Seite beliebig vorgegeben ist, zerlegungsgleich ist.

Hinweis: Man mache die Fallunterscheidung

(1) $d(B',C') > d(B,C)$ und (2) $d(B',C') < d(B,C)$.

Dabei sei $d(A,B) \geq d(B,C)$ vorausgesetzt.

Satz 8.8:

Zu jeder Polygonfläche existiert eine zerlegungsgleiche Rechteckfläche.

Beweis: Aufgabe

Hinweis: Man beachte Def.8.1 und verwende Satz 8.6 und Aufgabe 8.4.

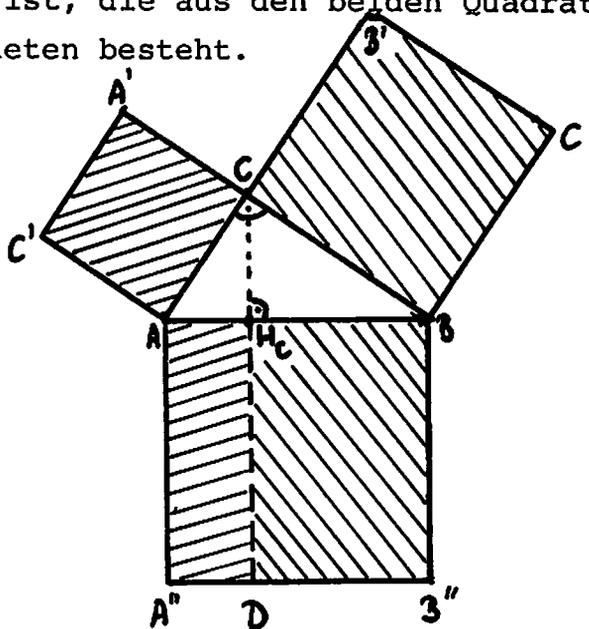
Aufgabe 8.5: Man zeige, daß im rechtwinkligen Dreieck die Quadratfläche über der Hypotenuse zerlegungsgleich zu der Polygonfläche ist, die aus den beiden Quadratflächen über den Katheten besteht.

Anl: Man zeige, daß in nebenstehender Abbildung gilt:

$$\Pi_{ACA'C'} \cong \Pi_{AH_CDA''}$$

und entsprechend:

$$\Pi_{CBC'B'} \cong \Pi_{BH_CDB''}$$



§9 Der Flächeninhalt

Jeder Polygonfläche soll eine positive reelle Zahl als Flächeninhalt zugeordnet werden. Dabei soll der Flächeninhalt der Polygonfläche - wie auch immer sie in Dreiecksflächen zerlegt wird, - die Summe der Flächeninhalte der Dreiecksflächen sein. Demnach muß die SUMME unabhängig von der Zerlegung sein.

Definition 9.1:

\mathcal{P} sei die Menge aller Polygonflächen.

Die Funktion $I: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $\Pi \mapsto I(\Pi)$ heißt FLÄCHENINHALTSFUNKTION, wenn gilt:

1. $I(\Pi) = I(\Pi_1) + I(\Pi_2)$

für jede Zerlegung einer Polygonfläche Π in Polygonflächen Π_1 und Π_2 .

2. $\bigwedge_{\Pi \in \mathcal{P}} \bigwedge_{\Pi' \in \mathcal{P}} \Pi \cong \Pi' \Rightarrow I(\Pi) = I(\Pi')$.

3. $I(\Pi) = 1$

für jede Quadratfläche Π mit Seiten der Länge 1 .

$I(\Pi)$ heißt FLÄCHENINHALT der Polygonfläche Π .

Bemerkung: Daß die Funktion eindeutig bestimmt ist, muß noch bewiesen werden.

Im folgenden setzen wir zunächst die Existenz einer Flächeninhaltsfunktion I voraus.

Satz 9.1:

Sind Π und Π' Polygonflächen, so gilt:

$$\Pi \stackrel{Z}{\cong} \Pi' \Rightarrow I(\Pi) = I(\Pi') \quad .$$

Beweis: Aufgabe

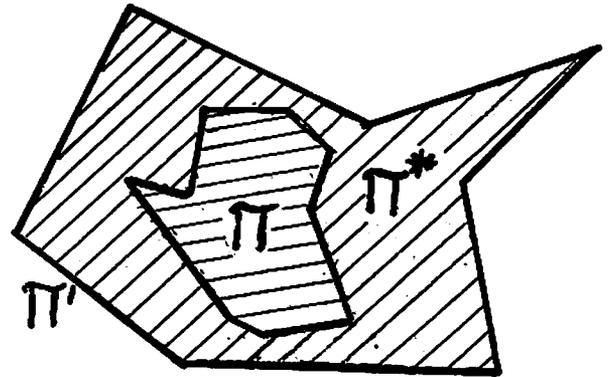
Satz 9.2:

Flächeninhaltsfunktionen sind streng monoton, d.h.

$$\bigwedge_{\Pi \in \mathcal{P}} \bigwedge_{\Pi' \in \mathcal{P}} \Pi \subsetneq \Pi' \Rightarrow I(\Pi) < I(\Pi')$$

Beweishinweis:

Es läßt sich - mühsam - zeigen, daß Π' in zwei Polygonflächen Π und Π^* elementargeometrisch zerlegbar ist (s. Abb.) Dann ergibt sich nach Def.9.1:



$$\left. \begin{aligned} I(\Pi) + I(\Pi^*) &= I(\Pi') \\ 0 < I(\Pi^*) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(\Pi) < I(\Pi') .$$

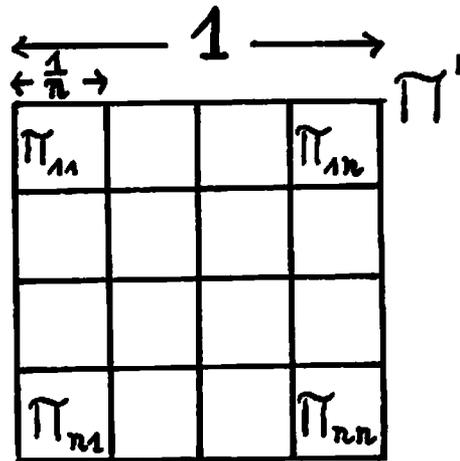
Satz 9.3:

Bei jeder Flächeninhaltsfunktion I haben die Quadratflächen Π mit der Seitenlänge $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) den Flächeninhalt

$$I(\Pi) = \frac{1}{n^2} .$$

Beweis:

Eine Quadratfläche Π' der Seitenlänge 1 kann man in n^2 Quadratflächen $\Pi_{11}, \dots, \Pi_{1n}, \dots, \Pi_{nn}$ der Seitenlängen $\frac{1}{n}$ zerlegen. Diese Quadratflächen sind kongruent. Sie besitzen deshalb alle denselben Flächeninhalt. Also folgt:



$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I(\Pi_{ij}) &= I(\Pi') = 1 \\ \Pi_{ij} \cong \Pi_{kl} \quad (i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow I(\Pi_{ij}) = \frac{1}{n^2} .$$

Satz 9.4:

Bei jeder Flächeninhaltsfunktion I haben die Rechteckflächen Π mit den rationalen Seitenlängen $a, b \in \mathbb{Q}^+$ den

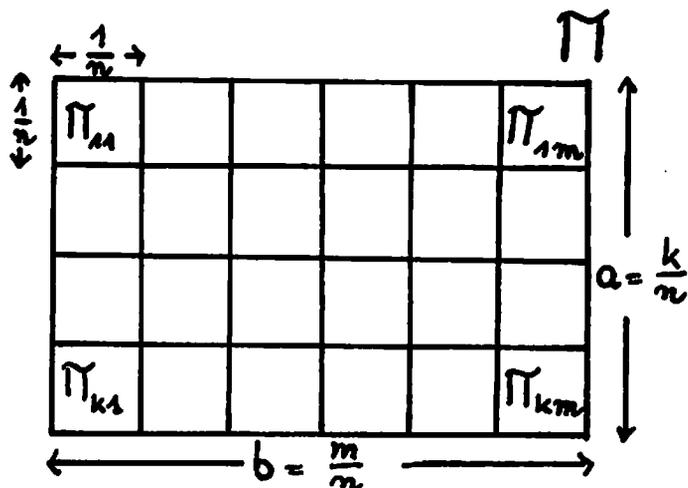
Flächeninhalt $I(\Pi) = a \cdot b$.

Beweis:

$a, b \in \mathbb{Q}^+$ kann man mit Hilfe des Hauptnenners n darstellen als

$$a = \frac{k}{n}, \quad b = \frac{m}{n} \quad (k, m, n \in \mathbb{N}).$$

Π ist zerlegbar in $k \cdot m$ Quadratflächen $\Pi_{11}, \dots, \Pi_{1m}, \dots, \Pi_{k1}, \dots, \Pi_{km}$ der Seitenlängen $\frac{1}{n}$. Diese



sind alle zueinander kongruent. Demnach gilt:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m I(\Pi_{ij}) = I(\Pi)$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{1}{n^2} = I(\Pi)$$

$$k \cdot m \cdot \frac{1}{n^2} = I(\Pi)$$

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{m}{n} = I(\Pi)$$

$$a \cdot b = I(\Pi) \quad .$$

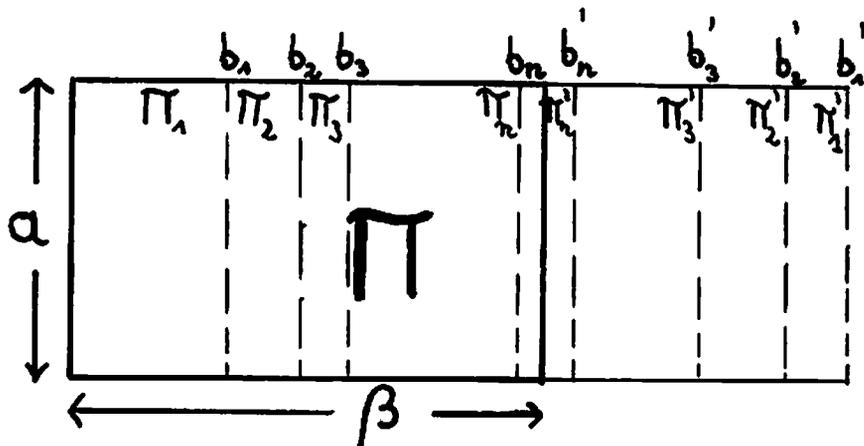
Satz 9.5:

Bei jeder Flächeninhaltsfunktion I haben die Rechteckflächen Π mit der rationalen Seitenlänge $a > 0$ und der irrationalen Seitenlänge $\beta > 0$ den Flächeninhalt

$$I(\Pi) = a \cdot \beta \quad .$$

Beweis:

Zu der positiven Irrationalzahl β gibt es eine monoton wachsende Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen und eine monoton



fallende Folge $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} b_n < \beta < b'_n \quad \text{und} \quad (b'_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Nullfolge;}$$

dabei kann $b_1 > 0$ gewählt werden.

Die Rechteckfläche Π kann nun so zerlegt werden, daß sie Rechteckflächen $\Pi_1, \dots, \Pi_n, \dots$ umfaßt, deren eine Seite die Länge a und deren andere Seite die Länge $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ hat (s. Abb. auf Seite 9.3 unten).

Andererseits kann sie als Bestandteil von Zerlegungen von Rechteckflächen $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots, \Pi'_n, \dots$ aufgefaßt werden, deren eine Seite die Länge a hat und deren andere Seiten die Längen $b'_1, b'_2, \dots, b'_n, \dots$ haben (s. Abb. auf Seite 9.3 unten).

Für diese Rechteckflächen gilt demnach:

$$\Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \dots \subset \Pi_n \subsetneq \Pi \subsetneq \Pi'_n \subset \dots \subset \Pi'_2 \subset \Pi'_1$$

Daraus folgt nun mit Satz 9.2:

$$a \cdot b_1 \leq a \cdot b_2 \leq \dots \leq a \cdot b_n \leq I(\Pi) \leq a \cdot b'_n \leq \dots \leq a \cdot b'_2 \leq a \cdot b'_1 .$$

Da dies für $n \in \mathbb{N}$ beliebig gilt, folgt:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} b_n < \frac{I(\Pi)}{a} < b'_n .$$

Andererseits gilt:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} b_n < \beta < b'_n .$$

Da $(b'_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, kann es keine zwei verschiedenen Zahlen β und $\frac{I(\Pi)}{a}$ mit dieser Eigenschaft geben. Es gilt daher:

$$\frac{I(\Pi)}{a} = \beta$$

$$I(\Pi) = a \cdot \beta .$$

Satz 9.6:

Bei jeder Flächeninhaltsfunktion I haben die Rechteckflächen Π mit den irrationalen Seitenlängen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ den Flächeninhalt

$$I(\Pi) = \alpha \cdot \beta .$$

Beweis: Aufgabe

Folgerung 9.1:

Auf der Menge der Rechteckflächen stimmen alle Flächeninhaltsfunktionen überein.

Satz 9.7:

Hat eine Dreiecksfläche Δ eine Seite der Länge a und hat der zugehörige Höhenabschnitt die Länge h , so gilt für jede Flächeninhaltsfunktion I :

$$I(\Delta) = \frac{a \cdot h}{2} .$$

Beweis:

Die Dreiecksfläche ist zerlegungsgleich einer Rechteckfläche mit Seiten der Längen a bzw. $\frac{h}{2}$ (s. Sätze 8.6 und 8.7 auf den Seiten 8.8/8.9). Mit Satz 9.4-9.6 folgt die Behauptung.

Satz 9.8:

Es gibt höchstens eine Flächeninhaltsfunktion I .

Beweis:

Jede Polygonfläche Π ist in Dreiecksflächen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ zerlegbar. Die Flächeninhalte der Dreiecksflächen sind nach Satz 9.7 unter allen Inhaltsfunktionen gleich groß.

Wegen
$$I(\Pi) = \sum_{i=1}^n I(\Delta_i)$$

stimmen dann aber alle Inhaltsfunktionen auf allen Polygonflächen überein.

Aufgabe 9.1: Man beweise, daß der Inhalt einer Parallelogrammfläche sich als Produkt aus der Länge einer Seite und der Länge des zugehörigen Höhenabschnitts ergibt.

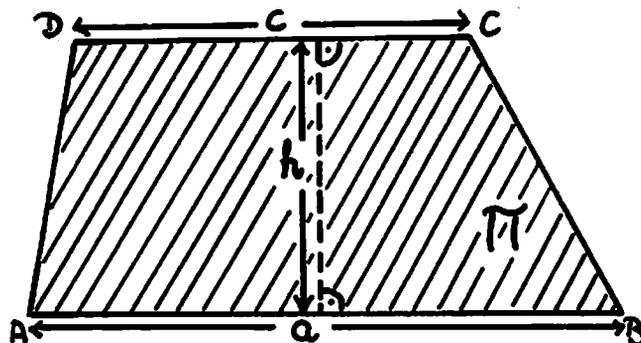
Definition 9.2:

Eine konvexe Viereckfläche, die ein Paar paralleler Sei-

ten besitzt, heißt
TRAPEZFLÄCHE .

Aufgabe 9.2: Π sei eine Trapezfläche mit zwei zueinander parallelen Seiten der Längen a und c ; h sei die Länge des zugehörigen Höhenabschnitts. Man beweise: Für den Flächeninhalt gilt

$$I(\Pi) = \frac{a+c}{2} \cdot h \quad .$$



Nachdem wir gezeigt haben, daß es höchstens eine Flächeninhaltsfunktion geben kann, werden wir beweisen, daß mindestens eine solche Funktion existiert.

Durch die vorangegangenen Überlegungen wissen wir, wie wir die Werte einer Flächeninhaltsfunktion für Dreiecksflächen festzusetzen haben.

Definition 9.3:

Jeder Dreiecksfläche Δ wird durch die Flächeninhaltsfunktion I als FLÄCHENINHALT $I(\Delta)$ das halbe Produkt aus der Länge einer Seite und der Länge des zugehörigen Höhenabschnitts zugeordnet.

Bemerkung: Daß die Flächeninhaltsfunktion I für Dreiecke wohldefiniert ist, ergibt sich aus der Aufgabe 6.10 auf Seite 6.9. Dort wurde gezeigt, daß im Dreieck für die aus den Seitenlängen a, b, c mit den Längen h_a, h_b, h_c der zugehörigen Höhenabschnitte gebildeten Produkte gilt:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c \quad .$$

Definition 9.4:

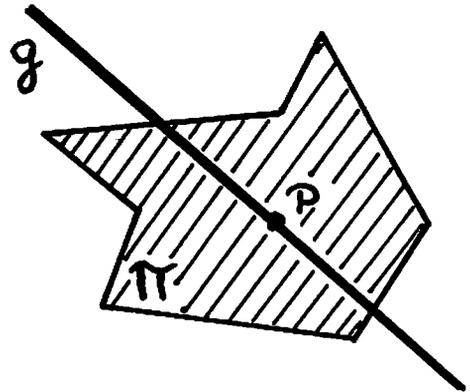
Sei Π eine in die Dreiecksflächen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ zerlegte Polygonfläche. Dann ist ihr FLÄCHENINHALT $I(\Pi)$ die Summe der Flächeninhalte der Dreiecksflächen:

$$I(\Pi) = \sum_{i=1}^n I(\Delta_i) \quad .$$

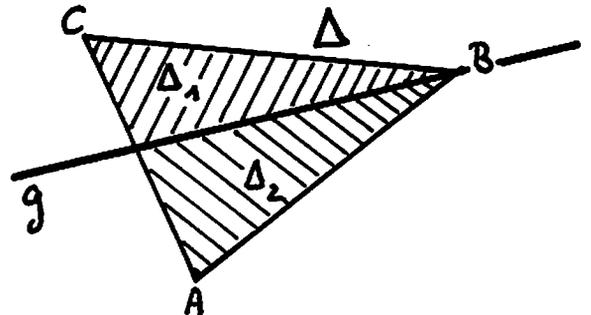
Wir haben noch zu zeigen, daß die so festgesetzte Zahl $I(\Pi)$ nicht von der Art der Zerlegung in Dreiecksflächen abhängt.

Definition 9.5:

Eine Gerade $g \in \mathcal{G}$, der ein innerer Punkt einer Polygonfläche Π angehört, heißt TRANSVERSALE.

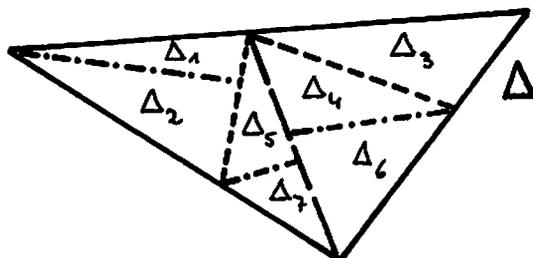


Bemerkung: Offensichtlich wird jede Dreiecksfläche Δ von jeder Transversalen g durch eine Ecke dieses Dreiecks in zwei Teildreiecksflächen Δ_1 und Δ_2 zerlegt.



Definition 9.6:

Die Zerlegung einer Dreiecksfläche Δ in zwei Teildreiecksflächen Δ_1 und Δ_2 mittels einer Transversalen durch eine Ecke heißt EINFACHE TRANSVERSALZERLEGUNG. Die Zerlegung einer Dreiecksfläche Δ in Teildreiecksflächen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ heißt TRANSVERSALZERLEGUNG, wenn sie durch eine endliche Folge von einfachen Transversalzerlegungen hergestellt werden kann (s. Abb.)



Wir können eine einfache hinreichende Bedingung für eine Transversalzerlegung einer Dreiecksfläche formulieren:

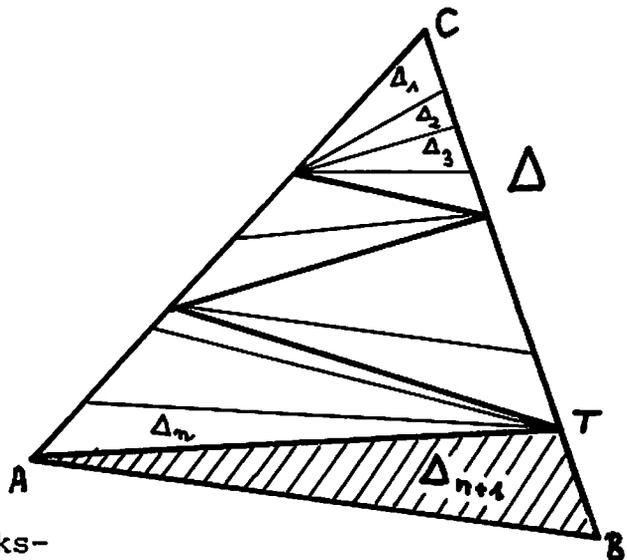
Satz 9.9:

Die Zerlegung einer Dreiecksfläche Δ in Teildreiecksflächen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ ist eine Transversalzerlegung, wenn zwei Seiten existieren, die alle Ecken der Teildreiecke enthalten.

Beweis: (durch vollst. Ind. nach der Anzahl n der Teildreiecksflächen)

Induktionsanfang:

Für $n=2$ muß die einzige Transversale durch eine Ecke hindurchgehen, weil sonst keine zwei Dreiecke erzeugt werden. Demnach liegt eine Transversalzerlegung vor.



Induktionsannahme:

Jede Zerlegung einer Dreiecksfläche Δ in höchstens n Teildreiecksflächen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ ist eine Transversalzerlegung, wenn zwei Seiten existieren, die alle Ecken der Teildreiecke $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ enthalten.

Induktionsschritt:

Die Fläche Δ eines Dreiecks $\{A, B, C\}$ sei in $n+1$ Dreiecksflächen $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \Delta_{n+1}$ derart zerlegt, daß die Voraussetzungen des Satzes erfüllt seien.

\overline{AB} enthalte innen keine Ecken von Teildreiecken (s. Abb. oben). Dann sind A und B Ecken einer Teildreiecksfläche Δ_{n+1} , deren dritte Ecke T auf $\overline{BC} \cup \overline{CA}$ liegt; sei o.B.d.A. $T \in \overline{BC}$.

Die Fläche des Dreiecks $\{A, T, C\}$ ist in Teildreiecksflächen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ zerlegt, deren Ecken sämtlich auf $\overline{TC} \cup \overline{CA}$ liegen, da es ja im Inneren von $\{A, B, C\}$ keine solchen Ecken gibt. Nach der Induktionsannahme han-

delt es sich dabei um eine Transversalzerlegung. Außerdem ist Δ in Δ_{n+1} und die Fläche von $\{A, T, C\}$ einfach transversal zerlegt, d.h. auch die Zerlegung von Δ in $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \Delta_{n+1}$ kann durch eine Folge von einfachen Transversalzerlegungen erzeugt werden und ist somit selbst eine Transversalzerlegung.

Satz 9.10:

Jede Zerlegung einer Dreiecksfläche Δ in Dreiecksflächen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ läßt sich durch Transversalzerlegungen der Δ_i zu einer Transversalzerlegung von Δ verfeinern.

Beweis:

Durch die Ecken der Zerlegung $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ werden von einer Ecke A aus Geraden gelegt, welche jeweils A und einen Eckpunkt der Δ_i ($i=1, \dots, n$) enthalten. Diese Geraden zerlegen Δ transversal in Dreiecksflächen $\Delta'_1, \dots, \Delta'_m$.

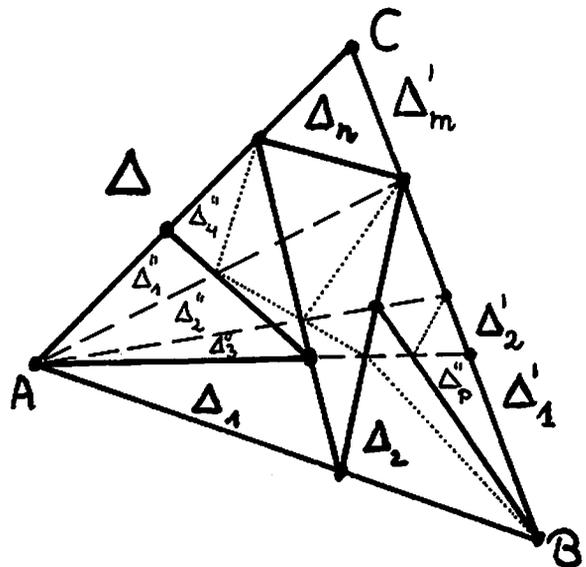
Zugleich zerlegen diese Geraden die Dreiecksflächen der ursprünglichen Zerlegung $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ in Dreiecks- und Vierecksflächen. Diese Vierecksflächen werden diagonal in Dreiecksflächen zerlegt.

Damit ist eine Verfeinerung der Zerlegung $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ in Dreiecksflächen $\Delta''_1, \dots, \Delta''_p$ entstanden.

Das Innere jeder Dreiecksfläche Δ'_μ und ihre auf \overline{BC} liegende Seite enthalten nach Konstruktion keine Teilungspunkte; deshalb sind alle Δ'_μ nach dem Satz 9.9 transversal zerlegt.

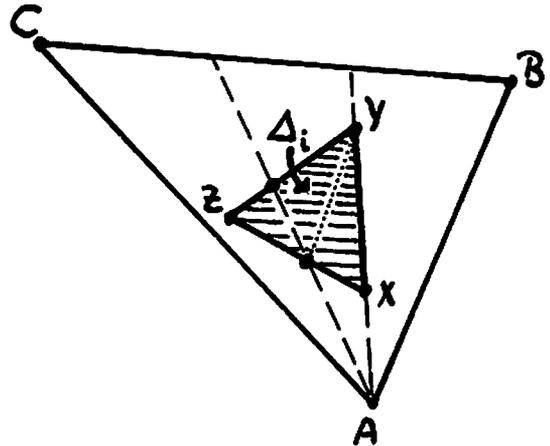
Damit ist auch Δ transversal zerlegt.

Wir haben noch zu zeigen, daß auch die Δ_i durch die $\Delta''_1, \dots, \Delta''_p$ transversal zerlegt sind:

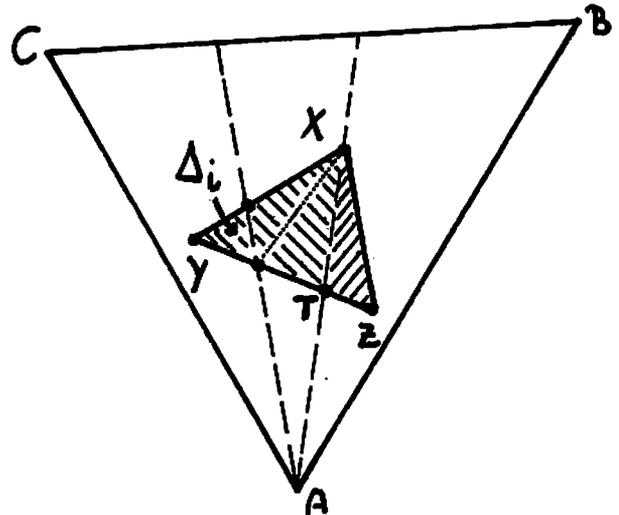


Sei Δ_i die Fläche des Dreiecks $\{X, Y, Z\}$.

- a) Dann kann eine Dreiecksseite auf einer Transversalen durch A liegen (etwa $\overline{XY} \subset AX$, vgl. Abb.)
 Dann ist diese Seite und das Innere von Teilpunkten frei, d.h. alle Ecken der zerlegenden Dreiecke befinden sich auf den beiden anderen Seiten
 $\overline{XZ} \cup \overline{YZ}$.



- b) Oder es kann eine Transversale durch A die Fläche Δ_i in zwei Teildreiecksflächen zerlegen, nämlich als Ecktransversale des Dreiecks $\{X, Y, Z\}$. Sei AX diese Ecktransversale und T der Schnittpunkt von AX mit \overline{YZ} (s. Abb.) Dann ist die Seite \overline{XT} der beiden Teildreiecksflächen und das Innere beider Teildreiecksflächen von Teilpunkten frei; beide Teildreiecksflächen und damit auch Δ_i sind nach Satz 9.9 transversal zerlegt.



Satz 9.11:

Ist eine Dreiecksfläche Δ in Dreiecksflächen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ zerlegt, so gilt:

$$I(\Delta) = \sum_{i=1}^n I(\Delta_i) .$$

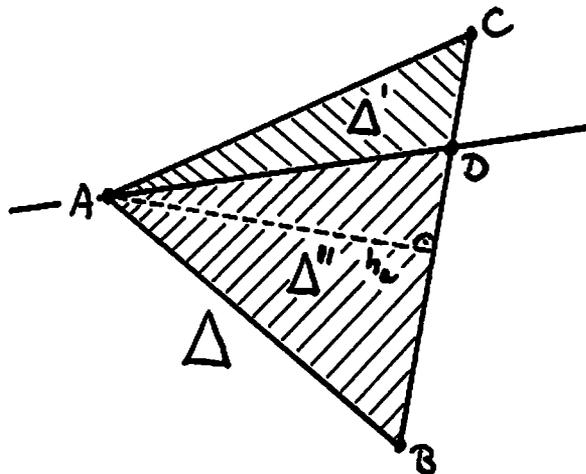
Beweis:

(a) Sei Δ in Δ' und Δ'' einfach transversal zerlegt.

Die Ecktransversale schneide die Seite \overline{BC} in einem

inneren Punkte D. Sei h_a die Länge des zur Seite \overline{BC} gehörigen Höhenabschnitts. Dann gilt:

$$\begin{aligned} I(\Delta) &= \frac{h_a}{2} \cdot d(B,C) \\ &= \frac{h_a}{2} \cdot [d(B,D) + d(D,C)] \\ &= \frac{h_a}{2} \cdot d(B,D) + \frac{h_a}{2} \cdot d(D,C) \\ &= I(\Delta'') + I(\Delta') \end{aligned}$$



(b) Sei Δ transversal zerlegt. Wir führen einen Induktionsbeweis nach der Anzahl n der zerlegenden Dreiecke:

Ind.-Anf:

Für $n=2$ liegt eine einfache Transversalzerlegung vor, und die Aussage des Satzes ist nach (a) richtig.

Ind.-Ann:

Der Satz sei richtig für jede Transversalzerlegung von Δ in höchstens n Dreiecksflächen.

Ind.-Schritt:

Sei Δ transversal zerlegt in die Dreiecksflächen

$\Delta_1, \dots, \Delta_{n+1}$. Das bedeutet:

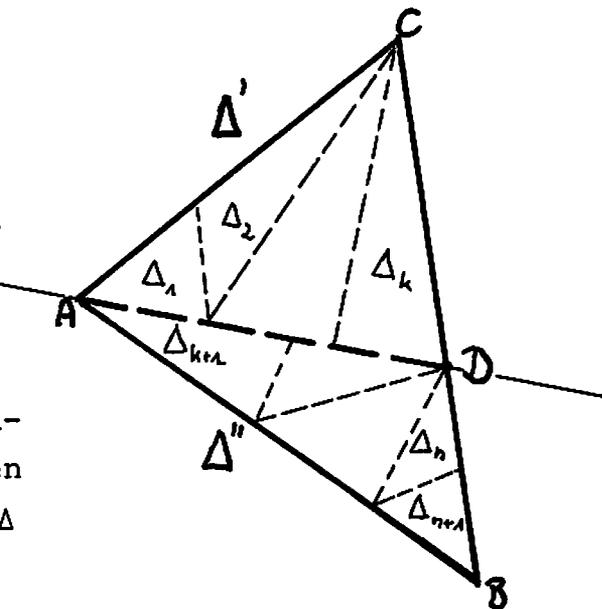
Die Δ_i sind durch eine Aufeinanderfolge von einfachen Transversalzerlegungen erzeugbar.

Bereits die erste dieser einfachen Transversalzerlegungen zerlegt die Dreiecksfläche Δ in zwei Dreiecksflächen Δ' und Δ'' , die jede für sich

weiterzerlegt werden (in unserer Abb. ist diese Zerlegung gegeben durch die Gerade AD).

Bei geeigneter Numerierung ist daher Δ' in $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ und Δ'' in $\Delta_{k+1}, \dots, \Delta_{n+1}$ transversal zerlegt. Dabei gilt:

$$1 \leq k \leq n \quad \text{und} \quad n+1-k \leq n$$



Nach der Induktionsannahme ist

$$I(\Delta') = \sum_{i=1}^k I(\Delta_i) \quad \text{und} \quad I(\Delta'') = \sum_{i=k+1}^{n+1} I(\Delta_i) .$$

Nach dem Teil (a) ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} I(\Delta) &= I(\Delta') + I(\Delta'') \\ &= \sum_{i=1}^k I(\Delta_i) + \sum_{i=k+1}^{n+1} I(\Delta_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} I(\Delta_i) \end{aligned}$$

(c) Sei Δ beliebig in Dreiecksflächen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ zerlegt. Diese Zerlegung verfeinert man durch transversale Zerlegungen der Δ_i gemäß Satz 9.10 zu einer Transversalzerlegung $\Delta_1'', \dots, \Delta_p''$ von Δ .

Damit ergibt sich nach Teil (b):

$$I(\Delta) = \sum_{i=1}^p I(\Delta_i'') .$$

Für alle $i=1, \dots, n$ seien $\Delta_{i1}'', \dots, \Delta_{ip_i}''$ diejenigen Dreiecksflächen unter den $\Delta_1'', \dots, \Delta_p''$, welche Δ_i transversal zerlegen. Für deren Inhalte gilt:

$$I(\Delta_i) = \sum_{v=1}^{p_i} I(\Delta_{iv}'') .$$

Die Mengen $\{\Delta_{11}'', \dots, \Delta_{1p_1}'', \dots, \Delta_{i1}'', \dots, \Delta_{ip_i}'', \dots, \Delta_{n1}'', \dots, \Delta_{np_n}''\}$ und $\{\Delta_1'', \dots, \Delta_p''\}$ sind identisch; sie sind durch Umnummerierung derselben Dreiecksflächen auseinander hervorgegangen.

Die Summe ihrer Flächeninhalte ist daher gleich.

Damit ergibt sich auch in diesem Falle:

$$\sum_{i=1}^n I(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^{p_i} I(\Delta_{iv}'') = \sum_{i=1}^p I(\Delta_i'') = I(\Delta) .$$

Nun können wir beweisen, daß die Definition des Flächeninhalts für beliebige Polygonflächen von der speziellen Zerlegung in Dreiecksflächen unabhängig ist.

Satz 9.12:

$\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_n\}$ und $\{\Delta''_1, \dots, \Delta''_m\}$ seien Zerlegungen der Polygonfläche Π in Dreiecksflächen. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n I(\Delta'_i) = \sum_{j=1}^m I(\Delta''_j) .$$

Beweis:

$\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ sei eine nach Satz 8.2, Seite 8.5 existierende gemeinsame Verfeinerung der beiden Zerlegungen.

Jede Dreiecksfläche Δ'_i ist in gewisse Dreiecksflächen Δ_j zerlegt, und ihr Flächeninhalt $I(\Delta'_i)$ ist die Summe der Flächeninhalte dieser zerlegenden Δ_j . Jedes Δ_j ist zerlegender Bestandteil genau einer Dreiecksfläche von

$\{\Delta'_1, \dots, \Delta'_n\}$. Deshalb gilt:

$$\sum_{i=1}^n I(\Delta'_i) = \sum_{j=1}^k I(\Delta_j) .$$

Mit der gleichen Begründung gilt:

$$\sum_{i=1}^m I(\Delta''_i) = \sum_{j=1}^k I(\Delta_j) .$$

Daraus aber folgt die Behauptung.

Satz 9.13:

Die Zuordnung eines Flächeninhalts $I(\Pi)$ zu jeder Polygonfläche Π gemäß Definition 9.4 definiert eine Flächeninhaltsfunktion (s. Def. 9.1) auf der Menge der Polygonflächen.

Beweis:

Sei $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ eine Zerlegung der Polygonfläche Π in Dreiecksflächen; seien $a_i, h_i \in \mathbb{R}^+$ ($i=1, \dots, n$) die Längen einer zu Δ_i gehörigen Dreiecksseite und des passenden Höhenabschnitts. Dann gilt

$$I(\Pi) = \sum_{i=1}^n I(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i h_i}{2} \in \mathbb{R}^+ .$$

1. Sei $\{\Pi_1, \Pi_2\}$ eine Zerlegung der Polygonfläche Π in zwei Polygonflächen. Diese seien wiederum in Dreiecks-

flächen $\Delta'_1, \dots, \Delta'_n$ bzw. $\Delta''_1, \dots, \Delta''_m$ zerlegt.
 Dann ist Π in die Dreiecksflächen $\Delta'_1, \dots, \Delta'_n, \Delta''_1, \dots, \Delta''_m$
 zerlegt (vgl. Lösung zu Aufgabe 8.3, Seite 8.5),
 und es gilt:

$$\begin{aligned} I(\Pi) &= I(\Delta'_1) + \dots + I(\Delta'_n) + I(\Delta''_1) + \dots + I(\Delta''_m) \\ &= \sum_{i=1}^n I(\Delta'_i) + \sum_{i=1}^m I(\Delta''_i) \\ &= I(\Pi_1) + I(\Pi_2) . \end{aligned}$$

2. Sei $\Pi \equiv \Pi'$.

Dann existiert eine Kongruenzabbildung $\beta: E \rightarrow E$ mit
 $\beta\Pi = \Pi'$. $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ sei eine Zerlegung von Π :

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i .$$

Nach dem Beweis von Satz 8.3 (Seite 8.6) ist dann

$$\Pi' = \beta\Pi = \bigcup_{i=1}^n \beta\Delta_i ,$$

wobei $\{\beta\Delta_1, \dots, \beta\Delta_n\}$ eine Zerlegung von Π' in Dreiecksflächen darstellt. Mit den Dreiecksflächen sind die zugehörigen Dreiecke kongruent.

In kongruenten Dreiecken sind entsprechende Strecken gleich lang. Da Kongruenzen winkelmaßtreu sind, gehen Höhen wieder in Höhen über.

Dreieck und kongruentes Bild stimmen deshalb in den Längen der entsprechenden Seiten und in den Längen der zugehörigen Höhenabschnitte überein.

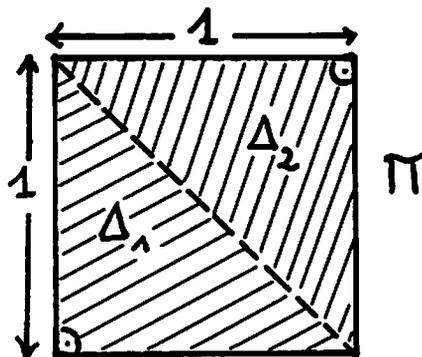
Das bedeutet:

$$\bigwedge_{i=1}^n I(\Delta_i) = I(\beta\Delta_i) .$$

Folglich ist
$$I(\Pi) = \sum_{i=1}^n I(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n I(\beta\Delta_i) = I(\Pi') .$$

3. Π sei eine Quadratfläche mit Seiten der Länge 1 .

Dann kann Π in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecksflächen zerlegt werden, die eine Seite der Länge 1 mit zugehörigem Höhenabschnitt der Länge 1 besitzen. Jede dieser Dreiecksflächen Δ_1, Δ_2 hat den Flä-



cheninhalt $I(\Delta_1) = I(\Delta_2) = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

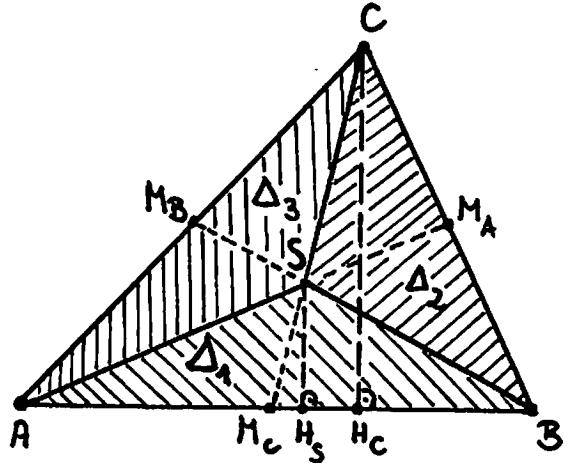
Damit folgt: $I(\Pi) = I(\Delta_1) + I(\Delta_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Aufgabe 9.3: Man zeige, daß mittels des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden jedes Dreieck in 3 flächengleiche Teildreiecke zerlegt wird, d.h. es gilt:

$$I(\Delta_{ABS}) = I(\Delta_{BCS}) = I(\Delta_{CAS}) .$$

Hinweis: Man beachte Aufgabe 4.9

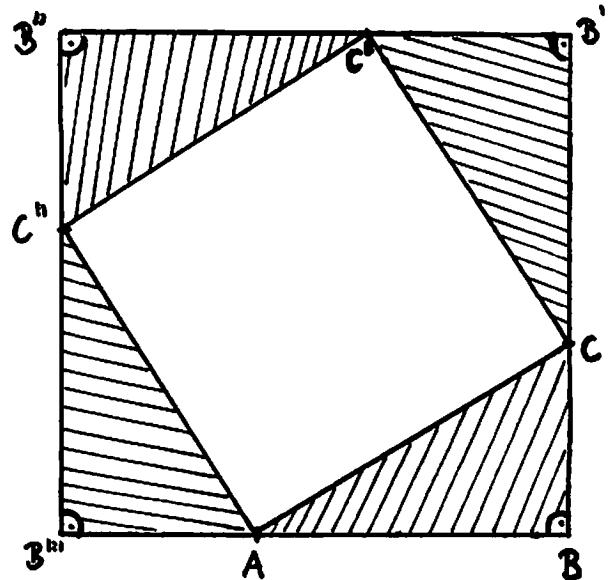
auf Seite 4.21 und zeige: $I(\Delta_i) = \frac{1}{3} \cdot I(\Delta_{ABC})$, $i=1,2,3$.



Aufgabe 9.4: Anhand der nebenstehenden Skizze beweise man nochmals den Satz des Pythagoras mittels der Eigenschaften der Flächenmaßfunktion:

Es sei $\{A,B,C\}$ ein Dreieck mit $\omega(\sphericalangle ABC) = 90$. Die in der Skizze markierten Dreiecke seien alle zu $\{A,B,C\}$ kongruent. Zeigen Sie: $d(A,C)^2 = d(A,B)^2 + d(B,C)^2$.

Hinweis: Man zeige zuerst, daß $\omega(\sphericalangle ACC') = 90$ folgt aus $\{A,B,C\} \cong \{C,B',C'\}$.



§ 10 RAUMPROBLEME

10.1 KEGEL SCHNITTE.

Schneidet man einen Kegel mit einer Ebene, erhält man einen sogenannten KEGELSCHNITT. Wir betrachten speziell die ebenen Schnitte von geraden Kreiskegeln.

a) Ellipse (Abb. 10.1).

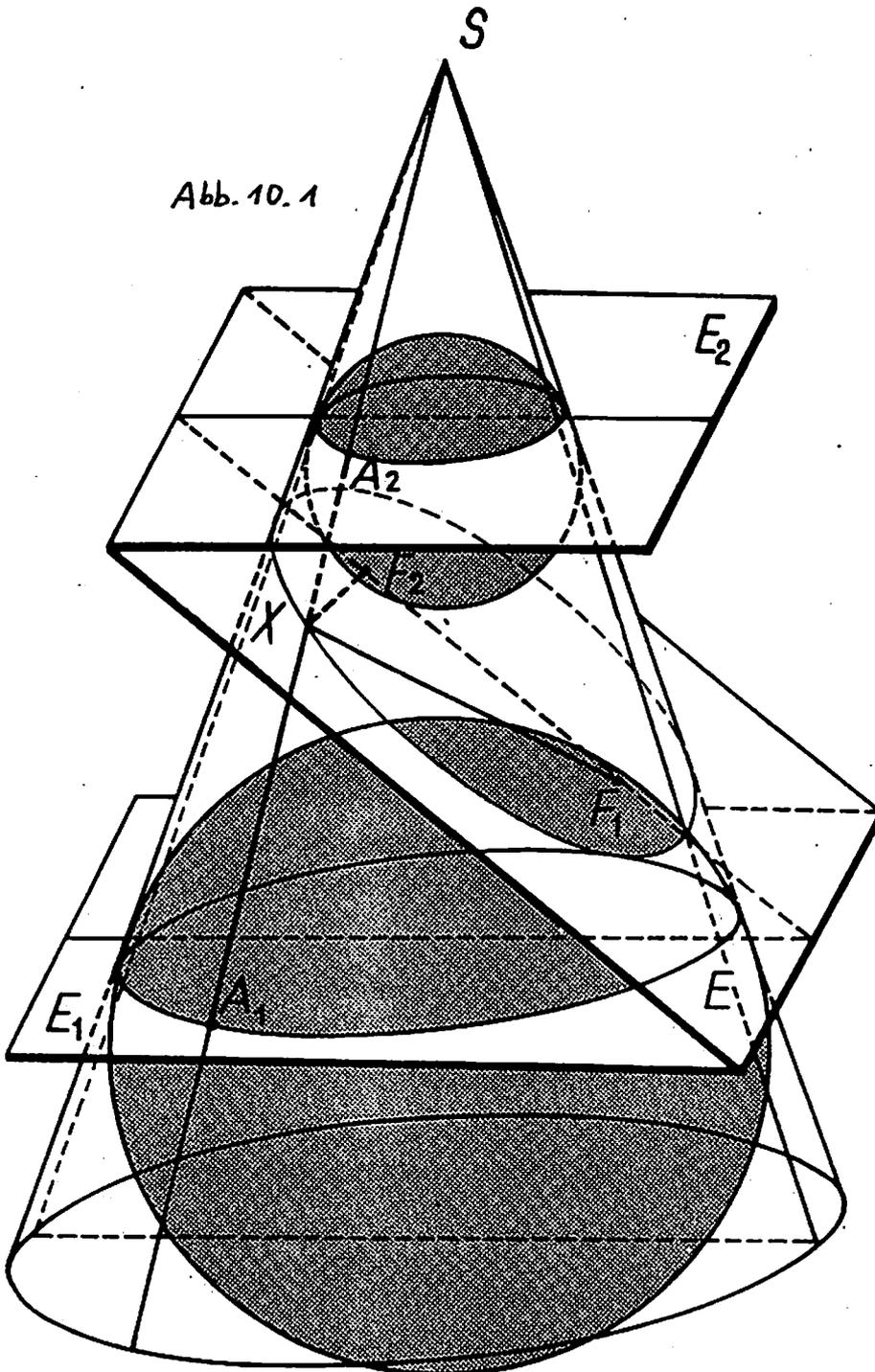
Der (kleinste) Winkel zwischen der Schnittebene E und der Rotationsachse des Kegels ist größer als der halbe Öffnungswinkel des Kegels.

Nach einer Idee von Dandelin (1794-1847) werden in dem

Kegel zwei Kugeln einbeschrieben, die die Schnittebene E in je einem Punkte F_1 bzw. F_2 tangieren. Der Kegel in je einem Kreise berühren. Die beiden Ebenen E_1 und E_2 , in denen diese Kreise liegen, sind zueinander parallel. F_1 und F_2 heißen BRENNPUNKTE der Ellipse.

Die Mantellinie durch einen beliebigen Punkt X der Ellipse schneidet die Kreise in A_1 bzw. A_2 . Da die von X an die erste Kugel gelegten Tangentenstrecken gleich lang sind, gilt $d(X, A_1) = d(X, F_1)$.

Abb. 10.1



Entsprechend ergibt sich durch Betrachtung der anderen Kugel $d(X, A_2) = d(X, F_2)$. Damit ergibt sich für jeden Ellipsenpunkt X

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = d(X, A_1) + d(X, A_2) = \overline{A_1 A_2}.$$

Da die Länge $d(A_1, A_2)$ der Strecke $A_1 A_2$ nicht vom Ellipsenpunkt X abhängt, gilt

Satz 10.1:

Die Summe der Entfernungen von den beiden Brennpunkten ist für alle Punkte einer Ellipse gleich groß.

b) Hyperbel (Abb. 10.2).

Der Winkel zwischen der Schnittebene E und der Rotationsachse des Kegels ist kleiner als der halbe Öffnungswinkel des Kegels. Die Spitze S des Kegels ist nicht in der Schnittebene enthalten.

Die DANDELINSchen Kugeln berühren die Schnittebene E in den Brennpunkten F_1 und F_2 der Hyperbel sowie dem (Doppel-)Kegel in den Kreisen durch die Tangenten-

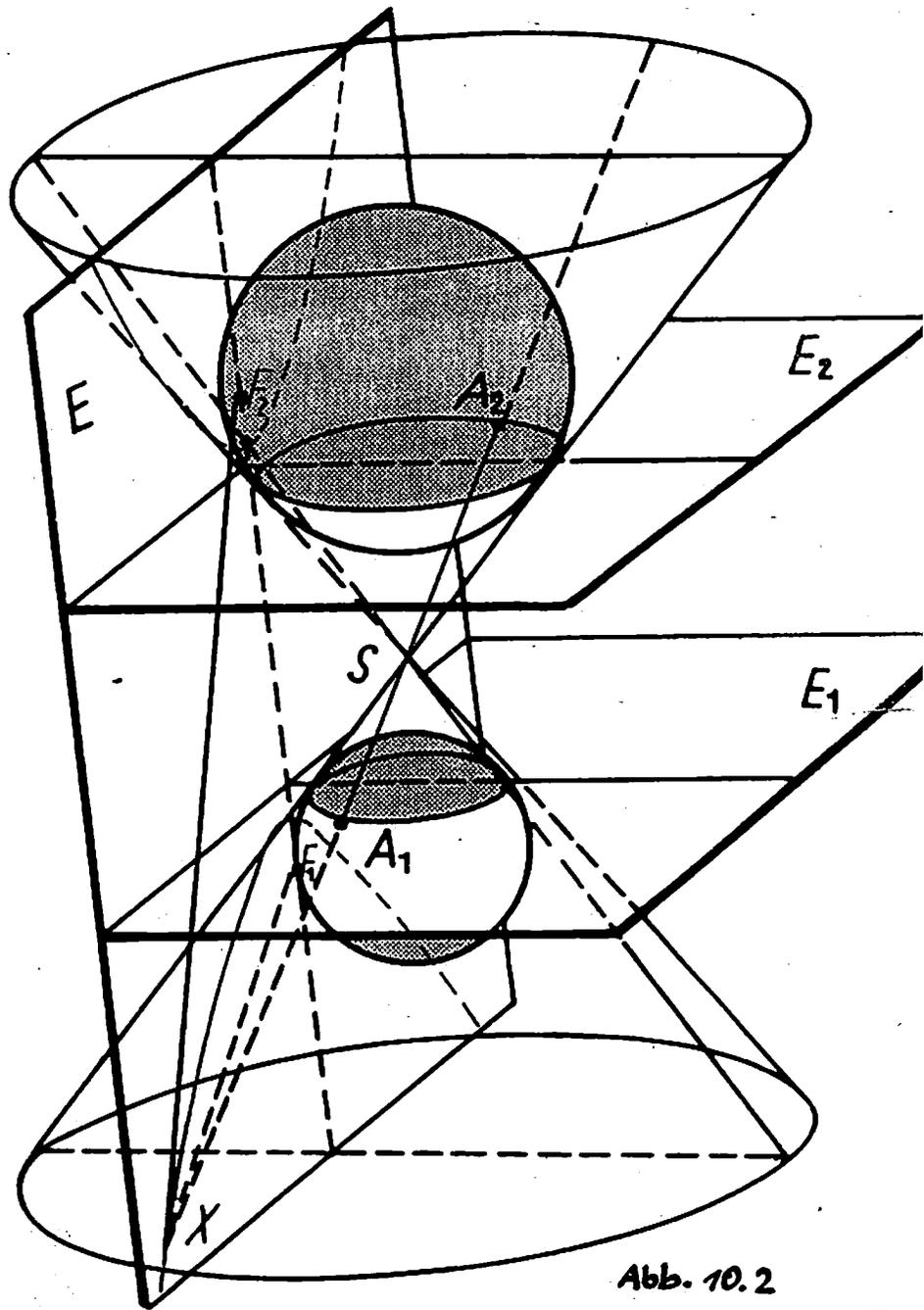


Abb. 10.2

berührungspunkte A_1, A_2 der Mantellinie durch einen Hyperbelpunkt X . Die Kreise liegen in parallelen Ebenen E_1, E_2 . Da alle Tangenten von einem Punkt an eine Kugel bis zu den Berührungspunkten gleich lange Strecken haben, gilt $d(X, F_1) = d(X, A_1)$ und $d(X, F_2) = d(X, A_2)$. Daraus ergibt sich hier

$$d(X, F_2) - d(X, F_1) = d(X, A_2) - d(X, A_1) = d(A_1, A_2).$$

Die Länge $d(A_1, A_2)$ der Strecke $\overline{A_1 A_2}$ ist vom Hyperbelpunkt X unabhängig. Deshalb gilt

Satz 10.2:

Die Differenz der Entfernungen zu den beiden Brennpunkten ist für alle Hyperbelpunkte gleich groß.

c) Parabel (Abb. 10.3).

Die Schnittebene E schneidet den Kegel parallel zu genau einer Mantellinie m . Es gilt nur eine DANDELINsche Kugel, die E im Brennpunkt F der Parabel und den Kegel im Schnittkreis einer Ebene E_1 berührt. m tangiere die Kugel in B . Die Mantellinie XS durch einen beliebigen Punkt X der Parabel schneide den Berührungskreis in A . Dann sind \overline{SA} und \overline{SB} gleich lang. $l = E \cap E_1$ ist die Schnittgerade der beiden Ebenen E und E_1 , C der Schnittpunkt von BA mit l . Die fünf Punkte S, B, A, C, X liegen in einer Ebene. Diese enthält die Gerade $SB = m$, welche zu E parallel ist. Deshalb ist ihre Schnittgerade

mit E , also CX , parallel zu SB . Damit bestimmen diese fünf Punkte eine Strahlensatzfigur mit dem Scheitel A . Es gilt

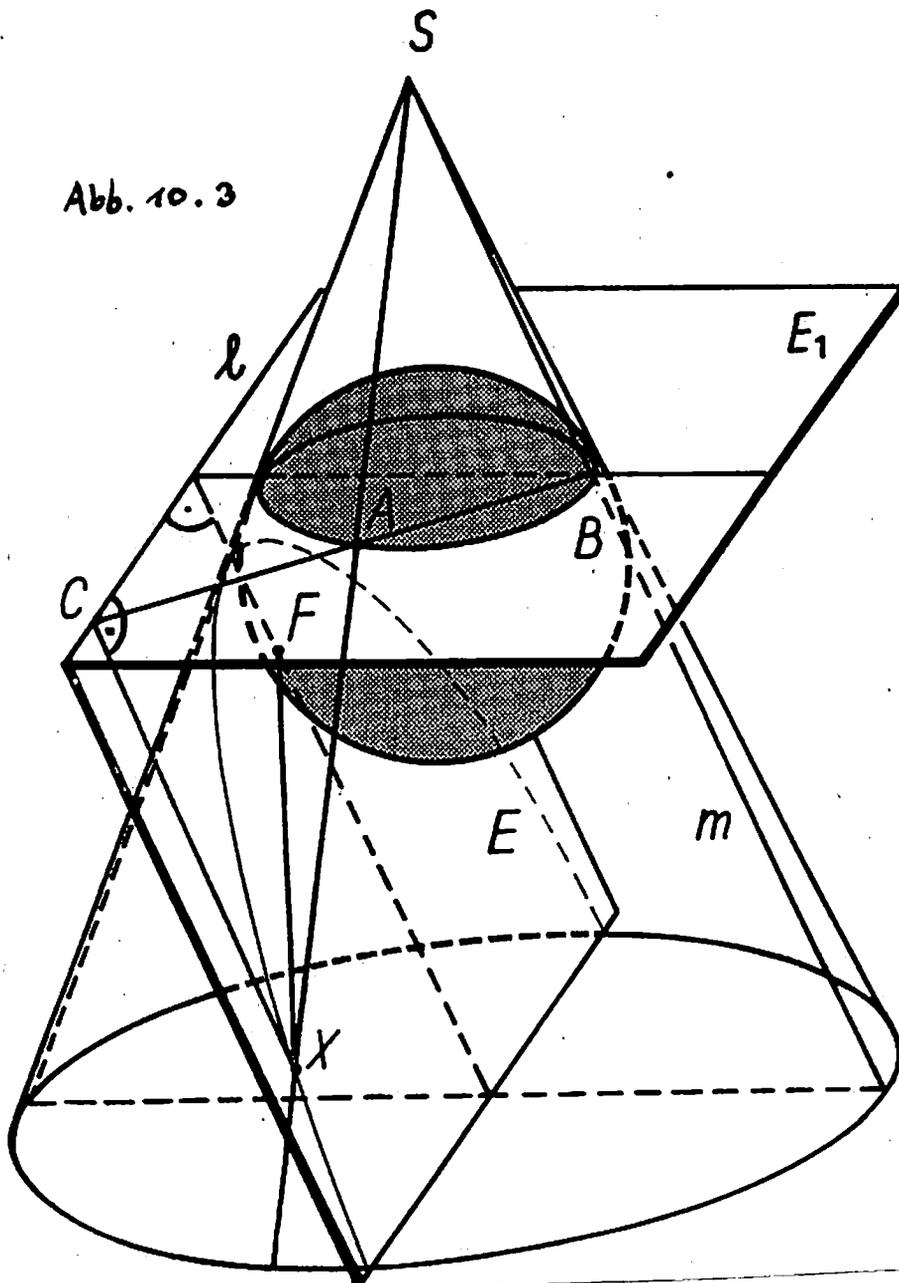
$$\frac{d(A,S)}{d(A,X)} = \frac{d(S,B)}{d(X,C)} \quad \text{mit } d(S,A) = d(S,B)$$

Daraus folgt $d(X,A) = d(X,C)$. Da \overline{XA} und \overline{XF} Abschnitte von Tangenten an dieselbe Kugel sind, ist auch $d(X,F) = d(X,C)$. l heißt Leitgerade der Parabel. Da CX senkrecht l ist (warum?), gilt der

Satz 10.3:

Jeder Punkt einer Parabel ist vom Brennpunkt und von der Leitgeraden gleich weit entfernt.

Abb. 10.3



10.2 DAS VOLUMEN DER POLYEDER.

Wir werden nur einige Aspekte des Volumensproblems betrachten. Auf ein vollständiges axiomatisches Fundament und lückenlose Ableitungen verzichten wir. Geben wir zunächst Beispiele für Polyeder.

Definition 10.1:

Ein konvexer Körper, dessen Oberfläche (Rand) aus zwei kongruenten, in parallelen Ebenen liegenden Polygonflächen und n Parallelogrammflächen besteht, heißt ein n -SEITIGES PRISMA. Das Prisma heißt SCHIEF bzw. GERADE, je nachdem ob die Parallelogramme schief- bzw. rechteckig sind. Ein gerades Prisma heißt regelmäßig, wenn seine beiden Polygonflächen regelmäßige Vielecke sind. Sind die beiden Polygonflächen ebenfalls Parallelogrammflächen, spricht man von einem SPAT. Ein Spat, dessen Oberfläche von sechs Rechtecken gebildet wird, heißt QUADER. Der Quader heißt WÜRFEL, wenn die Rechtecke Quadrate sind.

Definition 10.2:

Ein konvexer Körper, dessen Oberfläche aus einer Polygonfläche und n Dreiecken besteht, heißt n -SEITIGE PYRAMIDE. MAN spricht von einem TETRAEDER, wenn die Polygonfläche eine Dreiecksfläche ist.

Prismen und Pyramiden zählen zu den Polyedern.

In der Volumentheorie benutzt man einen schon von der Theorie der Flächenmessung bekannten Begriff: Die Zerlegungsgleichheit.

Definition 10.3:

Zwei Polyeder Π' und Π'' heißen ZERLEGUNGS-
GLEICH (Symbol: $\Pi'_1 \equiv \Pi''_2$), wenn sie in end-
lich viele paarweise kongruente Teilpolyeder zer-
legt werden können:

$$\Pi' = \bigcup_{v=1}^n \Pi'_v \quad ; \quad \Pi'' = \bigcup_{v=1}^m \Pi''_v \quad ;$$

$\Pi'_v \cap \Pi'_\mu$ und $\Pi''_v \cap \Pi''_\mu$ enthalten für $v \neq \mu$
höchstens Randpunkte des Teilpolyeders;

$$\Pi'_v \equiv \Pi''_v \quad \text{für } v = 1, 2, \dots, n.$$

Man kann nun die folgende Aussage beweisen.

Satz 10.4:

Gleiche hohe Prismen mit inhaltsgleichen
Gründflächen sind zerlegungsgleich.

Wir verzichten auf den Beweis. In Sonder-
fällen läßt er sich auf das ebene
Problem zurückführen:

Gleiche hohe Spate mit derselben rechteckigen Gründ-
fläche, die nur über eine Kante geneigt sind,
sind zerlegungsgleich (vgl. Abb. 10.4).

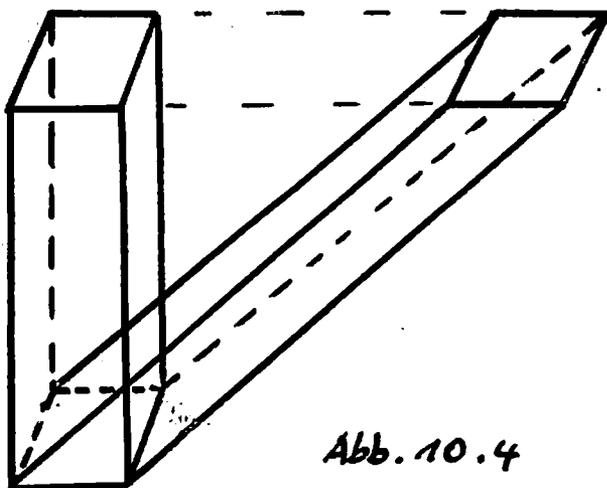


Abb. 10.4

Als Grund kann man
auführen, daß ein
Rechteck und ein Par-
allelogramm mit gleich
langer Grundseite, wenn
sie auch gleich hoch
sind, zerlegungsgleich
sind. Daraus resul-

ist die Zerlegungsgleichheit des Quaders und des Spats. Da die Zerlegungsgleichheit auch im Raume eine Äquivalenzrelation ist, sind demnach zwei Spats des genannten Typs zerlegungsgleich.

Von der Volumen- theorie ganz analog zur Flächen- inhaltstheorie aufzubauen, müßte man dahin gelangen, daß - ausdrücklich ausgedrückt -, volumengleiche Polyeder zerlegungsgleich sind.

Man hat sich aber im 19. Jahrhundert ver- zettelt bemüht, diese Aussage nur für Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche und gleicher Höhe zu beweisen. Im Jahre 1900 stellte deshalb David HILBERT auf dem Mathe- maticerkongreß in Paris folgende Aufgabe: Es sollen zwei Pyramiden gleicher Höhe mit gemeinsamer Grundfläche angegeben werden, die nicht zerlegungsgleich sind.

Dieses Problem wurde wenige Monate später von MAX DEHN gelöst. Er zeigte, daß es eine not- wendige Bedingung für die Zerlegungsgleichheit von Polyedern gibt. Es war dann nicht mehr schwer, ein Paar von Pyramiden der gefor- derten Art zu finden, für die die Dehn- sche Bedingung nicht gilt.

Von der Dehnschen Entdeckung zu beschreiben, benöti- gen wir den Begriff des „Kantenwickels“ bei Poly-

edern. Jede zu einer Kante k eines Polyeders senkrecht Ebene schneidet aus dem durch k und die an k angrenzenden Polygonflächen gegebenen Halbebenen einen Winkel aus, der der Kantenwinkel von k heiße.

Satz 10.5 (DEHN):

Π' und Π'' seien zerlegungsgleiche Polyeder. Die Maße ihrer Kantenwinkel seien $\delta'_1, \dots, \delta'_r$ bzw. $\delta''_1, \dots, \delta''_s$. Dann gibt es nichtnegative ganze Zahlen $m_1, \dots, m_r; n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}_0$ und eine ganze Zahl n mit

$$m_1 \delta'_1 + \dots + m_r \delta'_r = n \cdot 180 + n_1 \delta''_1 + \dots + n_s \delta''_s.$$

Beispiel 10.1:

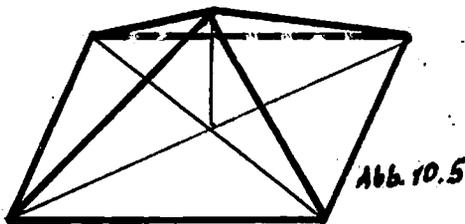


Abb. 10.5

Verbindet man die 4 Ecken einer Seitenfläche eines Wfels mit dem Raumdiagonalschnittpunkt, so erhalt eine JUEL'sche PYRAMIDE (Abb. 10.5).

Jede JUEL'sche Pyramide ist zu einem Quader zerlegungsgleich.

Die Kantenwinkel der Pyramide messen an der Grundfläche $45 = \frac{1}{4} \cdot 180$, da die Pyramide halb so hoch wie breit ist und $120 = \frac{2}{3} \cdot 180$, wo zwei Dreiecksflächen zusammenstoßen, da jede dieser Kanten innerhalb des Wfels zu genau drei Pyramiden gehört.

Die Kantenwinkel des Quaders messen alle

$90 = \frac{1}{2} \cdot 180$. Damit ist der Dehn'sche Satz erfüllt:

mit $m_1 = \dots = m_4 = 1, m_5 = \dots = m_8 = 3, n_1 = \dots = n_{12} = 1$

und $n = 3$ gilt

$$\sum_1^4 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 180 + \sum_1^4 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 180 = 3 \cdot 180 + \sum_1^{12} \frac{1}{2} \cdot 180$$

Die Pyramide hat 8, der Quader 12 Kanten.

Da der Satz nur notwendig ist, gerät es nicht die Zerlegungsgleichheit. Aber er widerspricht über vor allem nicht. Tatsächlich ist es gelungen, den zerlegungsgleichen Quader zu konstruieren.

HILBERT forderte nichtzerlegungsgleiche Pyramiden. Legt man die Spitze eines quadratischen Pyramide senkrecht über die Mitte einer Grundseite (Abb. 10.6) in Höhe

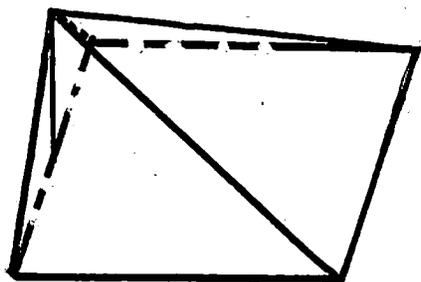


Abb. 10.6

der halben Länge einer Grundseite, so erhält man eine zur JUEL-schen Pyramide nicht-zerlegungsgleiche Pyramide, obwohl beide gleiche Höhe

und kongruente Grundflächen besitzen. Der Nachweis, daß der Satz von DEHN nicht erfüllt ist, macht einige Schwierigkeiten; wir verzichten deshalb darauf.

Wenn man die Volumengleichheit von Pyramiden kongruenter Grundfläche und gleicher Höhe nicht über Zerlegungsgleichheit begründen kann, muß man einen anderen Weg gehen. Zwar wollen wir den Volumenbegriff ordentlich einführen.

Definition 10.4:

\mathcal{R} im der Raum der Geometrie. Die Funktion V heißt Volumenfunktion, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

0. $V: \{\Pi \mid \Pi \subset \mathcal{R} \text{ Polyeder}\} \rightarrow \mathbb{R}^+$
1. $\bigwedge_{\Pi_1 \subset \mathcal{R}} \bigwedge_{\Pi_2 \subset \mathcal{R}} \Pi_1 \equiv \Pi_2 \Rightarrow V(\Pi_1) = V(\Pi_2)$
2. $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ mit $\Pi_1 \cap \Pi_2$ Randpunktmenge oder \emptyset
 $\Rightarrow V(\Pi) = V(\Pi_1) + V(\Pi_2)$
3. Π Würfel der Kantenlänge 1 $\Rightarrow V(\Pi) = 1$.

$V(\Pi)$ heißt Volumen des Polyeders Π .

Man hat zu zeigen, daß es genau eine solche Abbildung V gibt.

Setzt man V als gegeben voraus, findet man ähnlich wie im ebenen Fall, die Gültigkeit der folgenden Sätze.

Satz 10.6:

ist Π ein Quader, dessen Kanten die Längen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ besitzen, so gilt $V(\Pi) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$.

Satz 10.7:

ist Π ein gerades Prisma der Höhe ε , und ist Π seine Grundfläche, so gilt $V(\Pi) = \varepsilon \cdot I(\Pi)$.

Polyeder lassen sich i. a. nicht in Prismen zerlegen. Die „Grundbausteine“ sind vielmehr Pyramiden, speziell Tetraeder. Für diese gilt

Satz 10.8:

ist Π eine Pyramide der Höhe ε , und ist Π die Grundfläche, so gilt $V(\Pi) = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot I(\Pi)$.