Freie Universität Berlin SS 2013
Fachbereich Mathematik 15.06.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

9. Übungsblatt zur „Elementargeometrie“

(Zentralabgabe der Hausaufgaben: *25.06.2013, 14:00 Uhr*)

35. Aufgabe (**Hausaufgabe**):

Gegeben seien die (nichteuklidischen) Punkte $P,Q \in \boldsymbol{E}_N$ mit $P = (6,3)$ und $Q = (-1,4)$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der nichteuklidischen Geraden $g_N = PQ_N$ und den nicht-euklidischen Abstand $d_N(P,Q)$ der beiden Punkte $P,Q \in g_N$.

b) Bestimmen Sie rechnerisch den nichteuklidischen *Mittelpunkt* der nichteuklidischen Strecke $\overline{PQ}_N$.

	6,0

36. Aufgabe:

Sei g_N die nichteuklidische Gerade im Poincaréschen Halbebenenmodell mit *euklidischem* Mittelpunkt M^* und *euklidischem* Radius $r > 0$ und γ_{gN} die nichteuklidische Achsenspiegelung an der „Geraden“ g_N gemäß Konstruktionsvorschrift im Skript auf S. 3.16.

a) (**Übungsaufgabe**) Zeigen Sie unter Anwendung (noch nicht bewiesener) elementargeometrischer Sätze über ähnliche Dreiecke bzw. den *Kathetensatz des Euklid* , daß die nichteuklidische Achsenspiegelung $\gamma_{gN} : \boldsymbol{E}_N \to \boldsymbol{E}_N$ auch durch folgende Abbildungsvorschrift charakterisiert wird: $\gamma_{gN} P = P'$ mit $P' \in \overline{|M^*P}$ und $d(P', M^*) \cdot d(P, M^*) = r^2$.

b) (**Hausaufgabe**) Folgern Sie daraus:
(1) g_N ist Fixpunktgerade unter γ_{gN} , (2) γ_{gN} vertauscht die beiden *nichteuklidischen* Halbebenen zu g_N und (3) $\gamma_{gN}\,\gamma_{gN} = id$.

c) (**Hausaufgabe**) Sind U^* und V^* die beiden Randpunkte von g_N und ist $h_N \in \boldsymbol{G}_N$ die *euklidische* Halbgerade mit Fußpunkt V^* senkrecht zu der Randgeraden von $\boldsymbol{E}_N$, so ist ihr Bild $\gamma_{gN} h_N$ unter γ_{gN} der *euklidische* Halbkreis mit Durchmesser $\overline{M^*V^*}$.

(<u>Hinweis zu (c)</u>: Man zeige unter Verwendung von Teil (a), daß für jeden Punkt $P \in h_N$ die Dreiecke $\{M^*, P, V^*\}$ und $\{M^*, \gamma_{gN} P, V^*\}$ jeweils ähnlich sind und wende die Umkehrung des Satzes von Thales an.)

	6,0

37. Aufgabe:

Wir wollen auf der Grundlage der Beschreibung der nichteuklidischen Achsenspiegelung $\gamma_{gN} : \boldsymbol{E}_N \to \boldsymbol{E}_N$ in Aufgabe 36 (a) den folgenden *rechnerischen* Zugang zu γ_{gN} finden.

a) (**Übungsaufgabe**)
Ist $g_N = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^+ \,\middle|\, x^2 + y^2 = r^2 \right\} \in \boldsymbol{G}_N$, die nichteuklidische Gerade mit euklidischem Mittelpunkt $M^* = (0,0)$ und Radius $r > 0$, so wird $\gamma_{gN} : \boldsymbol{E}_N \to \boldsymbol{E}_N$ beschrieben durch die Abbildungsvorschrift $\gamma_{gN}(x,y) = \left(\dfrac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \dfrac{r^2 y}{x^2 + y^2} \right)$ beschrieben.

b) (**Hausaufgabe**)
Zeigen Sie, dass $\gamma_{gN} \circ \gamma_{gN} = id$ ist und γ_{gN} gerade die beiden nichteuklidischen Halbebenen H_1 und H_2 von g_N miteinander vertauscht.

c) (**Hausaufgabe**)
Beweisen Sie, dass $g_N \in \boldsymbol{G}_N$ genau die Menge der Fixpunkte von γ_{gN} ist, d.h. dass g_N die *Fixpunktgerade* unter γ_{gN} ist.

d) (**Übungsaufgabe**)
Zeigen Sie, dass die beiden nichteuklidischen Geraden $h_N = \{(x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^+ \mid x = 0\}$ und $k_N = \{(x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^+ \mid (x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 1\}$ für den Fall $r = 1$ jeweils *Fixgeraden* unter γ_{gN} sind, d.h. dass gilt: $\gamma_{gN} h_N = h_N$ und $\gamma_{gN} k_N = k_N$.

e) (**Hausaufgabe**)
Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme von Teil (b) der Aufgabe die Bildgeraden $\gamma_{gN} h_N$ und $\gamma_{gN} k_N$ für die beiden nichteuklidischen Geraden $h_N = \{(x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^+ \mid (x-1)^2 + y^2 = 9\}$ und $k_N = \{(x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^+ \mid x = 5\}$.

	8,0