Freie Universität Berlin SS 2013
Fachbereich Mathematik 06.06.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

8. Übungsblatt zur „Elementargeometrie“
(Zentralabgabe der Hausaufgaben: *18.06.2013, 14:00 Uhr*)

31. Aufgabe (**Übungsaufgabe**):

Bezeichne $\boldsymbol{S}_Z$ die Menge aller möglichen Streckungen $\sigma : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ mit vorgegebenem Streckzentrum $Z \in \boldsymbol{E}$. Man beweise folgende Aussagen:

a) $\bigwedge_{\sigma,\tau \in \boldsymbol{S}_Z} \sigma\tau \in \boldsymbol{S}_Z \;\wedge\; \sigma\tau = \tau\sigma$,

b) $\bigwedge_{\sigma \in \boldsymbol{S}_Z} \sigma^{-1} \in \boldsymbol{S}_Z$.

Wie lautet jeweils der Streckfaktor von $\sigma\tau$ und von σ^{-1}?

(Hinweis zu b): Bezüglich der *Existenz* der *Abbildung* σ^{-1} haben wir in der Vorlesung am 04.06. schon bewiesen, dass σ bijektiv ist.)

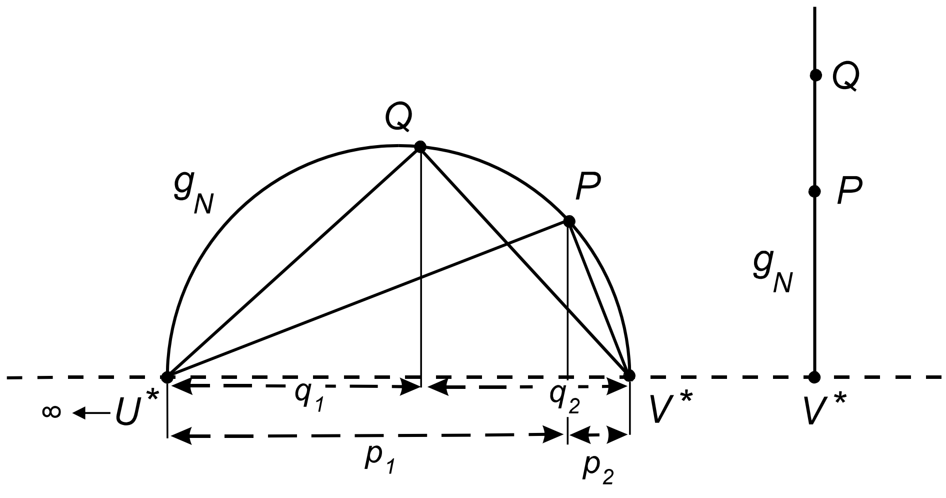
32. Aufgabe (**Hausaufgabe**):

Bezeichne im Poincaré-Modell der Halbebene $d_N : \boldsymbol{E}_N \times \boldsymbol{E}_N \to \boldsymbol{R}_0^+$ die *nicht-euklidische* Längenmaßfunktion laut Skript S. 3.13 und $d(P,Q)$ den *euklidischen* Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten P und Q der abgeschlossenen Halbebene.

a) Unter Anwendung von Hilfsmitteln aus der Schulgeometrie, welche in der Vorlesung bisher noch nicht bereitgestellt wurden (insbesondere *Satz von Thales*, *Ähnlichkeit von Dreiecken*, *Höhensatz des Euklid*), leite man für den nicht-euklidischen Abstand zweier Punkte P,Q auf der gemäß Skizze dargestellten N-Geraden g_N folgende äquivalente Darstellung zu der im Skript gegebenen her:

$$d_N(P,Q) = 2 \cdot \left| \ln\left(\frac{d(P,U^*)}{d(P,V^*)} : \frac{d(Q,U^*)}{d(Q,V^*)} \right) \right| .$$

Skizze:



– Bitte wenden –

b) Durch Grenzübergang $U^* \to \infty$ bzw. $r \to \infty$ folgere man mit Teil (a), dass für den nicht-euklidischen Abstand zweier Punkte P,Q auf der durch eine senkrechte Halbgerade durch V^* dargestellten N-Geraden g_N gilt:

$$d_N(P,Q) = 2 \cdot \left| \ln \frac{d(Q,V^*)}{d(P,V^*)} \right| .$$

	6,0

<u>*33. Aufgabe*</u>:

Weisen Sie für die nicht-euklidische Entfernungsfunktion $d_N : \boldsymbol{E}_N \times \boldsymbol{E}_N \to \boldsymbol{R}_0^+$ im Poincaré-Modell der Halbebene nach, daß sie die Eigenschaften der im Streckenmaßaxiom (V) geforderten Abstandsfunktion besitzt, d.h. es gilt
(i) *Symmetrie*, (ii) *Additivität* und (iii) *eindeutige Abtragbarkeit*.

a) (<u>**Übungsaufgabe**</u>)
Beweisen Sie die genannten Eigenschaften im Fall einer *euklidischen Halbgeraden* g_N .

b) (<u>**Hausaufgabe**</u>)
Weisen Sie die Eigenschaften nach im Fall eines *euklidischen Halbkreises* g_N .

<u>Hinweis</u> zu (b):
Zeigen Sie im Fall des Nachweises der eindeutigen Abtragbarkeit, dass für den gesuchten Punkt $A \in g_{N1} = {}^{|}\overline{PQ}_N$ mit $d_N(P,A) = a$ mit zugehörigen euklidischen Abschnittslängen x_1 und x_2 auf der Randgeraden zur Poincare-Halbebene bei gegebenem euklidischen Durchmesser $2r = d(U^*,V^*)$ für die nichteuklidische Gerade g_N gelten muss:

$$x_1 + x_2 = 2r \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2r}{1 + \frac{p_2}{p_1} e^a} .$$

	8,0

<u>*34. Aufgabe*</u>:
Man überlege sich, wie sich in dem Poincaréschen Halbebenenmodell die folgenden geometrischen Objekte mittels Zirkel und Lineal konstruieren lassen:

a) (**Übungsaufgabe**) <u>die</u> nichteuklidische „Mittelsenkrechte" zu einer gegebenen nichteuklidischen „Strecke" $\overline{PQ} \subseteq \boldsymbol{E}_N$,

b) (**Hausaufgabe**) das Abtragen von nichteuklidischen „gleichlangen Strecken" auf einer gegebenen nichteuklidischen Geraden g_N, d.h. zu drei gegebenen Punkten $P,Q,A \in g_N$ werden <u>zwei</u> weitere Punkte $B,C \in g_N$ gesucht mit der Eigenschaft:

$$A \in \overline{BC} \quad \text{und} \quad d_N(A,B) = d_N(A,C) = d_N(P,Q) .$$

<u>Hinweis</u> zu (b):
Verwenden Sie zweimal die Konstruktion der Mittelsenkrechten aus Teil (a).

	6,0