Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

SS 2013
08.05.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

4. Übungsblatt zur „Elementargeometrie“

(Zentralabgabe der Hausaufgaben: *21.05.2013, 14:00 Uhr*)

15. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Vollziehen Sie im Tutorium die (relative) Unabhängigkeit des Halbebenenaxioms (VI) von den bisherigen Axiomen (I) bis (V) im Skript nach anhand des „*Missing Strip“ Geometriemodells* von der Homepage der LV (unter *Begleitmaterialien zur Vorlesung und zu den Tutorien*).

16. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Unter Verwendung des Satzes 2,6 aus dem Skript beweise man:

a) Jede Strecke $\overline{PQ} \subset g$ ist eine konvexe Menge.

b) Jede abgeschlossene Halbene $\mathcal{H} \cup h$ ist eine konvexe Menge.

Hinweis zu (b): Man unterscheide die Fälle (i) $P,Q \in \mathcal{H}$, (ii) $P,Q \in h$ sowie (iii) $P \in \mathcal{H}$, $Q \in h$.

	4,0

17. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Sei $g \in \boldsymbol{G}$ eine Gerade und $S \in g$ ein ausgezeichneter Punkt auf g. Auf der Menge $M = g \setminus \{S\} \neq \emptyset$ führen wir eine Relation „$\sim_S$“$\subseteq M \times M$ ein mittels

$$\forall\ P,Q \in M: \quad P \sim_S Q \ :\Leftrightarrow\ S \notin \overline{PQ}\ .$$

Man zeige:

a) $\sim_S$ stellt eine Äquivalenzrelation auf $M = g \setminus \{S\}$ dar.

b) Die Äquivalenzklassen zu $\sim_S$ sind für ein fest gewähltes $T \in g$, $T \neq S$ gerade die beiden offenen Halbgeraden $g_1^* = \overrightarrow{ST} \setminus \{S\}$ und $g_2^* = g \setminus \overrightarrow{ST}$.

18. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Sei $g \in \boldsymbol{G}$ eine Gerade in einer Geometrie $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$. Auf der Menge $M = \boldsymbol{E} \setminus g$ sei eine Relation Relation „$\sim_g$“$\subseteq M \times M$ eingeführt mittels

$$\forall\ P,Q \in M: \quad P \sim_g Q \ :\Leftrightarrow\ \overline{PQ} \cap g = \emptyset\ .$$

Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Pasch (Satz 2.5 im Skript):

a) $\sim_g$ stellt eine Äquivalenzrelation auf $M = \boldsymbol{E} \setminus g$ dar.

b) Die Äquivalenzklassen zu $\sim_g$ sind gerade die beiden Halbebenen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ zur Geraden g.

	8,0

19. Aufgabe:

Wir beweisen jetzt, dass sich das Halbebenenaxiom aus dem Satz von Pasch herleiten lässt:

– Bitte wenden –

Sei dazu $g \in \boldsymbol{G}$ eine beliebige Gerade und $T \in M = \boldsymbol{E} \setminus g$ ein Punkt außerhalb dieser Geraden. Wir definieren dann als Teilmengen von M :

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ X \in M \;\middle|\; \overline{TX} \cap g = \{\} \right\} \text{ und } \mathcal{H}_2 = \left\{ X \in M \;\middle|\; \overline{TX} \cap g \neq \{\} \right\} .$$

Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Pasch nacheinander:

a) (**Übungsaufgabe**) $\mathcal{H}_k \neq \varnothing$ für $k = 1,2$ mit $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \varnothing$, $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 = M = \boldsymbol{E} \setminus g$.

b) (**Übungsaufgabe**) $\mathcal{H}_1$ ist konvex.

c) (**Hausaufgabe**) $\mathcal{H}_2$ ist konvex.

d) (**Hausaufgabe**) $\forall P \in \mathcal{H}_1 \; \forall Q \in \mathcal{H}_2 : \; \overline{PQ} \cap g \neq \varnothing$.

e) (**Übungsaufgabe**) $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ sind eindeutig gegeben.

<u>Hinweis zu (b) bis (d)</u>:

Unterscheiden SIe für die beliebig gewählten Punkte $P,Q \in \mathcal{H}_k$, $k = 1,2$ die beiden Fälle
(i) P,Q,T sind *kollinear* und (ii) P,Q,T sind *nicht kollinear*.

	8,0