Freie Universität Berlin SS 2013
Fachbereich Mathematik 01.05.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

3. Übungsblatt zur „Elementargeometrie“

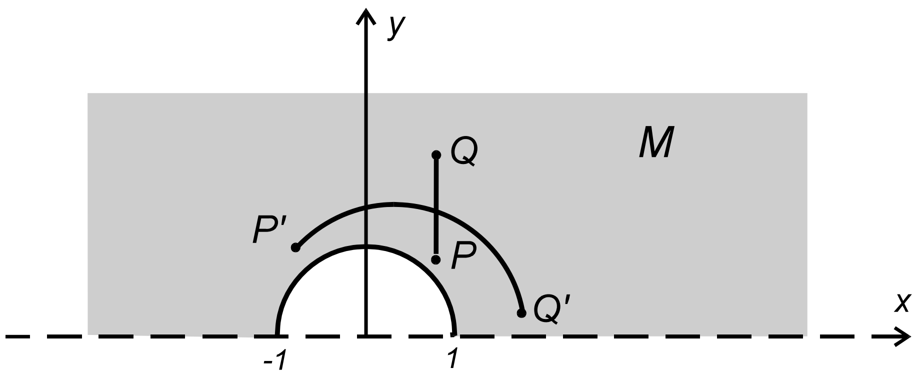
(Zentralabgabe der Hausaufgaben: *14.05.2013, 14:00 Uhr*)

11. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

In dem Poincaré-Modell der oberen Halbebene (s. Skript S.1.2) betrachte man die Menge $M = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^{+} \mid x^2 + y^2 > 1\}$. Unter der Voraussetzung, daß in diesem Modell die Geraden g_N durch $g_N = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^{+} \mid x = c\}$ bzw. $g_N = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^{+} \mid (x-c)^2+y^2 = r^2\}$ beschrieben werden mit geeignetem $c\in\boldsymbol{R}$ und $r>0$, zeige man: M ist konvex.

(Hinweis: Für $\overline{PQ} \subset M$ mit $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ setze man o.B.d.A. $x_1 \le x_2$ voraus und behandle die Fälle $x_1 = x_2$, $y_1 \le y_2$ und $x_1 < x_2$ getrennt. Man unterscheide zusätzlich im zweiten Fall: $c < 0$ und $c \ge 0$)

Skizze:

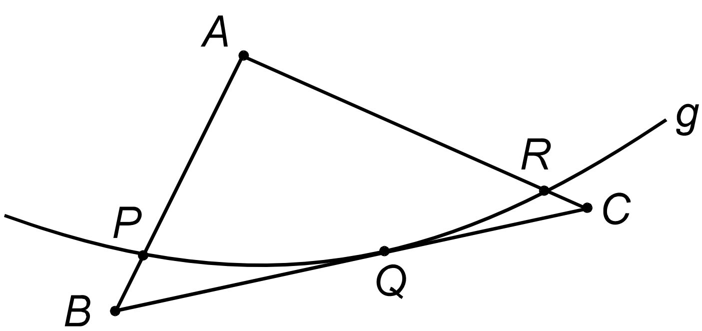


12. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Mithilfe des Satzes 2.5 (Satz von Pasch) beweise man:

Sind A, B, C drei nicht kollineare Punkte in $\boldsymbol{E}$ und sind $P, Q, R \in \boldsymbol{E}$ drei weitere Punkte mit: $P \in \overline{AB} \setminus \{A,B\}$, $Q \in \overline{BC} \setminus \{B,C\}$ und $R \in \overline{AC} \setminus \{A,C\}$, so sind die Punkte P, Q und R *nicht* kollinear.

Skizze:



(Hinweis: Man führe einen *indirekten Beweis* unter der Annahme, daß P, Q und R auf einer Geraden $g \subset \boldsymbol{E}$ liegen, und wende den Satz von Pasch auf das Dreieck

$\{A,P,R\}$ gemäß folgender Skizze sowie die *Antisymmetrie*-Eigenschaft der Relation $\preceq$ auf den Geraden AB und AC an)

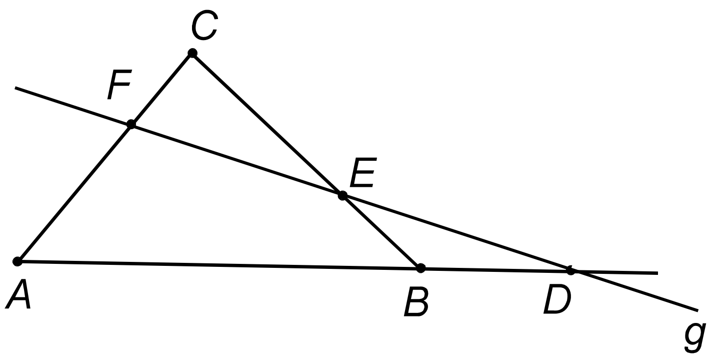
<u>*13. Aufgabe* (**Hausaufgabe**)*:*</u>

Man beweise *Peano's Axiom*: Sind A, B, C drei nicht-kollineare Punkte in $\boldsymbol{E}$ und D ein Punkt auf der Verbindungsgeraden AB mit $B \in \overline{AD}$, $B \neq D$ und $E \in \overline{BC} \setminus \{B,C\}$. Zeigen Sie:

Die Gerade $g = DE$ schneidet die Strecke $\overline{AC}$ in einem Punkt $F \in \overline{AC} \setminus \{A,C\}$.

(<u>Hinweis</u>: Man wende den Satz von Pasch an und zeige dann durch einen *indirekten Beweis*: $g \cap \overline{AB} = \emptyset$)

Skizze:



	10,0

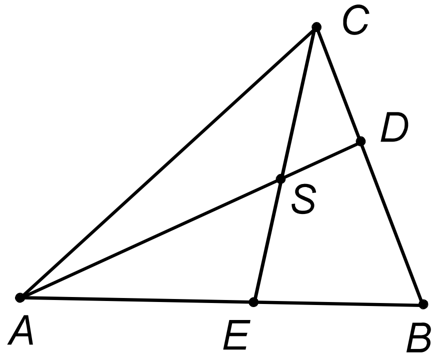
<u>*14. Aufgabe* (**Hausaufgabe**)*:*</u>

Mithilfe des Satzes von Pasch zeige man, daß sich jeweils zwei Transversalen eines Dreiecks schneiden, d.h. es gilt:

Sind A, B, C drei nicht-kollineare Punkte in $\boldsymbol{E}$ und D, E zwei weitere Punkte mit $D \in \overline{BC} \setminus \{B,C\}$ und $E \in \overline{AB} \setminus \{A,B\}$, so folgt: $\overline{CE} \cap \overline{AD} \neq \emptyset$

(<u>Hinweis</u>: Man zeige zunächst $AD \cap \overline{CE} \neq \emptyset$ sowie $CE \cap \overline{AD} \neq \emptyset$ und begründe dann, warum in beiden Fällen der Schnittpunkt derselbe ist.)

Skizze:



	10,0