Freie Universität Berlin SS 2013
Fachbereich Mathematik 23.04.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

2. Übungsblatt zur „Elementargeometrie“

(Zentralabgabe der Hausaufgaben: *07.05.2013, 14:00 Uhr*)

6. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Gegeben sei eine Geometrie $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ mit $\boldsymbol{G} \neq \emptyset$ durch die folgenden Axiome:

(I) Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei verschiedene Punkte.
(II) Durch jeden Punkt gehen mindestens zwei verschiedene Geraden.
(III) Außerhalb jeder Geraden liegt mindestens ein Punkt der Ebene.
(IV) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

Zeigen Sie:
a) Das Axiom (III) ist von den übrigen Axiomen abhängig.
b) Das Axiomensystem $\{$(I), (II), (IV)$\}$ ist relativ unabhängig.

	10,0

7. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Man betrachte die Funktion $d : \boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ mit $d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$ $(x,y \in \boldsymbol{R}^3)$.

a) Zeigen Sie: $(\boldsymbol{R}^3, d)$ ist ein metrischer Raum.
b) Wie sehen die „Kugeln“ $K(0, r) = \{x \in \boldsymbol{R}^3 \mid d(x,0) \leq r\}$ in Abhängigkeit von $r \geq 0$ aus?

8. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Man zeige, daß in einer Inzidenzgeometrie, in welcher das Anordnungsaxiom (IV) und das Streckenmaßaxiom (V) erfüllt sind, für jeweils 3 paarweise verschiedene *kollineare* Punkte $P, Q, R \in \boldsymbol{E}$ gilt:

a) $P \in \overline{QR} \vee Q \in \overline{PR} \vee R \in \overline{PQ}$,

b) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$, wobei $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q) \Leftrightarrow R \in \overline{PQ}$.

9. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Sei $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{E})$ mit $\boldsymbol{R} \neq \emptyset$ (der Raum) eine *räumliche Inzidenzgeometrie*, welche den Inzidenzaxiomen *Ax INZ 1* bis *Ax INZ 7* aus dem Skript (s. S. 1.14/15) genügt. Man beweise:

a) Zwei verschiedene Geraden $g,h \in \boldsymbol{G}$ haben höchstens einen gemeinsamen Punkt.
b) Zwei verschiedenen Ebenen $\alpha,\beta \in \boldsymbol{E}$ ist entweder kein Punkt oder eine ganze Gerade gemeinsam.
c) Eine Ebene $\alpha \in \boldsymbol{E}$ und eine nicht in α gelegene Gerade $g \in \boldsymbol{G}$ haben höchstens einen gemeinsamen Punkt.
d) Zu jeder Geraden $g \in \boldsymbol{G}$ und jedem Punkt $P \in \boldsymbol{R}$ mit $P \notin g$ existiert genau eine Ebene $\varepsilon \in \boldsymbol{E}$, welche P und alle Punkte von g enthält.
e) Es gibt genau eine Ebene $\alpha \in \boldsymbol{E}$, der alle Punkte von zwei sich schneidenden Geraden $g,h \in \boldsymbol{G}$ angehören.

	10,0

10. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Sei $\boldsymbol{R} = \{A_1, A_2, \ldots, A_8\}$ die Menge, bestehend aus den 8 *Eckpunkten* eines dreidimensionalen Würfels (s. Skizze). Ferner sei $\boldsymbol{G}$ die Menge der 12 *Würfelkanten* $g_{i\,k} = \{A_i, A_k\} \subseteq \boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{E}$ die Menge der 6 *Würfeldeckflächen* $\alpha_{i\,j\,k\,l} = \{ A_i, A_j, A_k, A_k \}$ gemäß Skizze. Bildet das System $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{E})$ eine räumliche Inzidenzgeometrie im Sinne der vorigen Aufgabe? Falls nein, welche der 7 Inzidenzaxiome sind in diesem Modell erfüllt, welche werden verletzt?