Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

WiSe 2013/14
13.01.2014

9. Übungsblatt zur „Analysis I (lehramtsbezogen)“

(Abgabe der Hausaufgaben: *16.01.2014*)

36. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Tonfrequenzen werden in Hertz (Hz), d.h. in Schwingungen pro Sekunde, gemessen. Unter Anwendung der in Aufgabe 35 (b) bewiesenen Formeln für die Kreisfunktionen wollen wir nun das Phänomen der sogenannten *Schwebung* erklären.

a) Beweisen Sie:

Sind $\omega_1, \omega_2 \in \boldsymbol{R}$ zwei dicht beieinander liegende Frequenzen, so gilt für die additive Überlagerung der zu beiden Frequenzen gehörenden Sinusschwingungen:

$(*)\quad y = f(t) = \sin\left(2\pi\omega_1 t\right) + \sin\left(2\pi\omega_2 t\right) = A(t) \cdot \sin\left(2\pi\omega t\right)$ mit $A(t) = 2 \cdot \cos\left(2\pi\Delta\omega t\right)$

mit einer entsprechenden *mittleren Frequenz* ω der Überlagerungsschwingung und einer entsprechenden *Schwebungsfrequenz* $\Delta\omega$. Man ermittle beide Werte in Abhängigkeit der gegebenen Ausgangsfrequenzen ω_1 und ω_2.

b) Ermitteln Sie konkret ω und $\Delta\omega$ für die beiden Fälle (i) $\omega_1 = 44\ Hz$, $\omega_2 = 40\ Hz$ sowie (ii) $\omega_1 = 439\ Hz$, $\omega_2 = 441\ Hz$ und skizzieren Sie (evtl. mit einem Funktionsplotter) die beiden aus der zugehörigen additiven Überlagerung der Schwingungen resultierenden Funktionsgraphen zu $y = f(t)$ gemäß $(*)$.

10,0	

37. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Indizieren Sie die folgenden Summen und Produkte gemäß der Vorgabe um und schreiben Sie sie einmal *explizit* aus:

(a) $\sum_{n=0}^{5}(n+1)^2 = \sum_{k=} k^2$, (b) $\sum_{n=0}^{3}(2n+5)^2 = \sum_{k=}(2k-1)^2$, (c) $\sum_{n=2}^{6}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+3)^2} = \sum_{k=}\frac{(-1)^?}{k^2}$,

(d) $\prod_{n=2}^{5}\frac{n-1}{n+2} = \prod_{k=}\frac{k-?}{k}$, (e) $\prod_{n=3}^{4}\frac{n+1}{n^2-4} = \prod_{k=}\frac{k-1}{?}$, (f) $\prod_{n=5}^{7}\frac{n^2-9}{n-2} = \prod_{k=}\frac{?}{k+1}$.

38. Aufgabe:

Unter Verwendung des Prinzips der vollständigen Induktion beweise man, daß für sämtliche natürliche Zahlen $n \in \boldsymbol{N_0}$ und alle reellen Zahlen $q \in \boldsymbol{R}$, $q \neq 1$ gilt:

Ü (a) $\sum_{k=1}^{n} k\,q^{k-1} = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$,

H (b) $\prod_{k=0}^{n}\left(1+q^{2^k}\right) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$.

Welche Formel erhält man jeweils im Fall $q = 1$?

8,0	

<u>*39. Aufgabe:*</u>

Ü (a) Mittels Auswertung der Teleskopsumme $\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^2-k^2\right]$ leite man unter Verwendung der summenfreien Darstellung von $\sum_{k=0}^{n}1$ für die Summe $\sum_{k=0}^{n}k$ eine geschlossene summenfreie Formel her und verifiziere diese anschließend mittels vollständiger Induktion.

H (b) Durch Anwendung des Binomischen Lehrsatzes sowie unter Anwendung der in (a) hergeleiteten und bewiesenen Formel für die Summe $\sum_{k=0}^{n}k$ leite man mittels Auswertung der Teleskopsumme $\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right]$ eine geschlossene Formel für die Summe $\sum_{k=1}^{n}k^2$ her und verifiziere diese anschließend mittels vollständiger Induktion.

10,0	

<u>*40. Aufgabe:*</u>

Ü (a) Unter Verwendung des Prinzips der vollständigen Induktion bezüglich $n\in\mathbf{N_0}$ zeige man, daß für sämtliche Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gilt: $\binom{n}{k}\in\mathbf{N_0}$ für alle $n,k\in\mathbf{N_0}$.

Man behandle dabei vorweg $k=0$ sowie $k>n$ als Extrafälle.

H (b) Beweisen Sie für den *verallgemeinerten Binomialkoeffizienten* $\binom{\alpha}{k}$ mit $\alpha\in\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{N}_0$, der definiert ist durch: $\binom{\alpha}{k}:=\prod_{i=1}^{k}\frac{\alpha+1-i}{i}$, die Gleichung: $\binom{\alpha}{k}+\binom{\alpha}{k+1}=\binom{\alpha+1}{k+1}$.

Berechnen Sie einmal konkret folgende Binomialkoeffizienten:

(i) $\binom{2001}{1999}$, (ii) $\binom{326}{350}$, (iii) $\binom{-7}{4}$, (iv) $\binom{-\frac{1}{2}}{4}$, (v) $\binom{\frac{4}{3}}{4}$.

8,0	

<u>*41. Aufgabe:*</u>

Ü (a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die *Bernoullische Ungleichung*:

$$(1+x)^n\geq 1+nx \quad \text{für alle } n\in\mathbf{N}_0 \text{ und } x\in[-1,+\infty[\text{ beliebig.}$$

H (b) Zeigen Sie, dass für alle $a\in\mathbf{R}$ mit $0<a<1$ und alle $n\in\mathbf{N}$ gilt: $(1-a)^n<\frac{n}{1+an}$.

8,0	