Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

WiSe 2013/14
16.12.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

8. Übungsblatt zur „Analysis I (lehramtsbezogen)"
(Abgabe der Hausaufgaben: *07.01.2014*)

32. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

In der Vorlesung vom Dienstag, 10.12.2013, wurden aus der eindeutigen Charakterisierung der Exponentialfunktion $exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ durch

(i) $exp\,(x_1 + x_2) = exp\,(x_1) \cdot exp\,(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ sowie

(ii) $exp\,(x) \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbf{R}$

einige Eigenschaften dieser Funktion bewiesen, wie z.B: $exp\,(0) = 1$, $exp\,(-x) = \dfrac{1}{exp\,(x)}$,

$exp\,(x) > 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$ sowie das streng monotone Wachstum von exp .

Wir zeigen weiterhin, dass aus (i), (ii) folgt:

a) Ist $e := exp\,(1)$, so ist $exp\,(n) = e^n$ für $n \in \mathbf{Z}$ beliebig sowie $exp\,(r) = e^r = \sqrt[n]{e^m}$ für jede rationale Zahl $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}$.

b) Die Umkehrfunktion $ln = exp^{-1} : \left]0, +\infty\right[\to \mathbf{R}$ zur Funktion exp erfüllt die Funktionalgleichung $ln\,(x_1 \cdot x_2) = ln\,(x_1) + ln\,(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \left]0, +\infty\right[$.

c) Die Funktion exp ist konvex, d.h. es gilt:

$$exp\,\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(exp(x_1) + exp(x_2)\right) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in \mathbf{R} .$$

33. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine reelle Funktion, welche die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$f\,(x_1 + x_2) = f\,(x_1) + f\,(x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in \mathbf{R} .$$

Beweisen Sie in Analogie zur Aufgabe 32 zu der Exponentialfunktion *exp*, dass für die Funktion f nacheinander folgende Eigenschaften gelten:

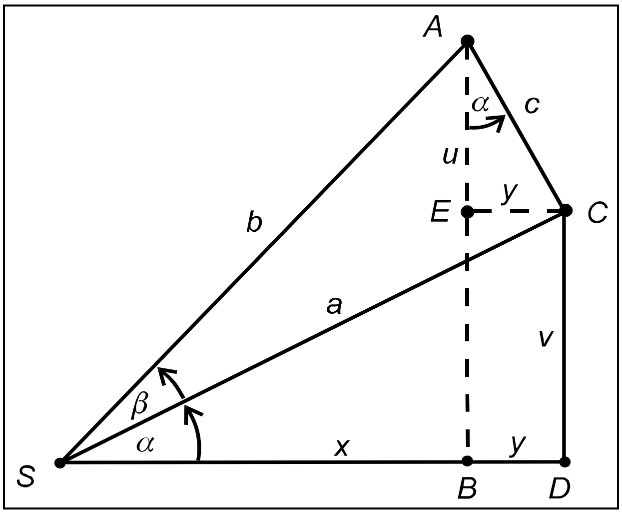
(i) $f\,(0) = 0$, (ii) $f\,(n) = a \cdot n$ und $f\,(-n) = -f\,(n) = -a \cdot n$ mit $a = f\,(1)$ für alle $n \in \mathbf{N}$,

(iii) $f\,(x) = a \cdot x$ für beliebige rationale Zahlen $x = \dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}$.

10,0	

34. Aufgabe:

Gegeben seien die drei rechtwinkligen Dreiecke ΔSCD, ΔSCA und ΔSAB mit entsprechenden Innenwinkeln α, β und $\alpha + \beta$ in S gemäß der folgenden Skizze:



a) (**Übungsaufgabe)**
Leiten Sie aus der Skizze das Additionstheorem für den Sinus her:

$$sin(\alpha+\beta) = sin(\alpha)\cdot cos(\beta) + cos(\alpha)\cdot sin(\beta)\ .$$

<u>*Tipp*</u>: Benutzen Sie an entscheidender Stelle, dass $\left|\overline{EB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$ ist.

b) (**Hausaufgabe)**
Leiten Sie analog zu Teil (a) aus der Skizze das Additionstheorem für den Cosinus her:

$$cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)\cdot cos(\beta) - sin(\alpha)\cdot sin(\beta)\ .$$

<u>*Tipp*</u>: Benutzen Sie an entscheidender Stelle, dass $\left|\overline{EC}\right| = \left|\overline{BD}\right|$ ist.

10,0	

<u>*35. Aufgabe:*</u>
Ausgehend von den in Aufgabe 34 bewiesenen Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen *sin* , *cos* und *tan* leite man die Gültigkeit folgender Gleichungen her:

Ü (a) (i) $cos^2(x) + sin^2(x) \equiv 1$, (ii) $cos^2(x) - sin^2(x) = cos\,(2x)$,

(iii) $2\,sin\,(x)\,cos\,(x) = sin\,(2x)$ (iv) $tan(x_1 + x_2) = \dfrac{tan(x_1) + tan(x_2)}{1 - tan(x_1)\cdot tan(x_2)}$.

H (b) (i) $sin\,x - sin\,x' = 2\cdot sin\,\dfrac{x - x'}{2}\cdot cos\,\dfrac{x + x'}{2}$, (ii) $cos\,x - cos\,x' = -2\cdot sin\,\dfrac{x - x'}{2}\cdot sin\,\dfrac{x + x'}{2}$

für alle $x, x' \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Folgern Sie daraus: Im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sind *sin* und *tan* streng monoton wachsend und *cos* streng monoton fallend.

<u>*Tipp*</u>**:** Man setze $u = \dfrac{x + x'}{2}$ sowie $v = \dfrac{x - x'}{2}$. Wie gewinnt man dann x, x' aus u,v zurück?

10,0	