Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

WiSe 2013/14
25.11.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

5. Übungsblatt zur „Analysis I (lehramtsbezogen)“

(Abgabe der Hausaufgaben: *03.12.2013*)

18. Aufgabe (**Übungsaufgabe**):

Gegeben sind die beiden Abbildungen

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ mit $f(x,y) := (x-1)\cdot(y+1)+1$ und $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ mit $g(u) := (u+1, 2\cdot u)$.

a) Bestimmen Sie jeweils die folgenden Funktionswerte für die *zusammengesetzten Abbildungen* $h_1 := g \circ f$ und $h_2 := f \circ g$ auf direktem Wege:

(i) $h_1(3,4)$, (ii) $h_1(2,1)$, (iii) $h_2(6)$, (iv) $h_2(1)$.

b) Leiten Sie jeweils die Abbildungsvorschrift für die beiden *Kompositionen* $h_1 : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ mit $h_1 := g \circ f$ und $h_2 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ mit $h_2 := f \circ g$ her und testen Sie diese mithilfe der in Teil (a) ermittelten konkreten Funktionswerte.

c) Untersuchen Sie (mit Begründung) die Abbildung g auf *Injektivität* und die Abbildung f auf *Surjektivität*.

19. Aufgabe (**Hausaufgabe**):

Gegeben seien die beiden Abbildungen $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ mit $f(x,y) = (2x-1)\cdot(y+2)$, $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ und $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ mit $g(u) = (3u+6, u-2)$, $u \in \boldsymbol{R}$.

a) Bestimmen Sie direkt die folgenden Funktionswerte für die beiden *zusammengesetzten Abbildungen* $h_1 := g \circ f$ und $h_2 := f \circ g$:

(i) $h_1\ (1,-2)$, (ii) $h_1\ (3,1)$, (iii) $h_2\ (-3)$, (iv) $h_2\ (2)$

b) Leiten Sie jeweils die Abbildungsvorschrift für die beiden *Kompositionen* $h_1 : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ mit $h_1 := g \circ f$ und $h_2 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ mit $h_2 := f \circ g$ her und testen Sie diese mithilfe der in Teil (a) ermittelten konkreten Funktionswerte.

c) Untersuchen Sie (mit Begründung) die Abbildung g auf *Injektivität* und die Abbildung f auf *Surjektivität*.

	10,0

20. Aufgabe (**Übungsaufgabe**):

In der Menge $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen sei die Relation $\sim^2 \subseteq \boldsymbol{R}^2$ definiert durch:

$x \sim^2 y \ :\Leftrightarrow\ x^2 = y^2 \quad (x,y \in \boldsymbol{R})$.

a) Zeigen Sie: $\sim^2 \subseteq \boldsymbol{R}^2$ ist eine Äquivalenzrelation.

b) Geben Sie folgende Mengen an:

(i) $[0] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \sim^2 0\}$, (ii) $[1]$, (iii) $[1] \cap [-1]$, (iv) $[1] \cap [0]$.

c) Skizzieren Sie die Quotientenmenge $P := \boldsymbol{R}/\sim^2 = \{[x] \mid x \in \boldsymbol{R}\}$.

d) Auf der Menge P aus Teil (c) definieren wir eine Addition $\oplus : P \times P \to P$ mittels der Vorschrift $\oplus([x],[y]) = [x] \oplus [y] := [x^2 + y^2]$ $(x,y \in \boldsymbol{R})$. Untersuchen Sie:

(i) Ist $\oplus$ wohldefinierte innere Verknüpfung? (ii) Ist $\oplus$ kommutativ? (iii) Existiert ein neutrales Element bezüglich $\oplus$? (iv) Für welche $[x] \in P$ existiert ein additiv Inverses?

e) Sei $f : P \to \boldsymbol{R}$ die reelle Abbildung, definiert durch $f([x]) = |x|$, $x \in \boldsymbol{R}$. Untersuchen Sie, ob f injektiv und / oder surjektiv ist. Läßt sich f durch Einschränkungen des Definitions- bzw. Wertebereichs *bijektiv* machen? Wie lautet dann die Umkehrabbildung f^{-1} ?

21. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Betrachte $\boldsymbol{N}$ „assoziativ" als ein Hotel mit einer unendlichen Anzahl an Einzelzimmern, durchnummeriert mit *1, 2, 3* usw. In der Hochsaison ist das Hotel stets voll besetzt. Der Hotelchef namens H. Ilbert schafft es aber immer noch, einem neuen Gast ein freies Zimmer zuweisen zu können, indem er den Gast aus Zimmer Nr. 1 in das Zimmer Nr. 2 verfrachtet, den Gast aus Zimmer Nr. 2 in Zimmer Nr. 3 usw. Das frei gewordene Zimmer Nr. 1 wird dann dem neu angekommenen Gast zugewiesen.

a) Beschreiben Sie den „Zimmerfrei"-Trick des Monsieur Ilbert mittels Abbildung $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$. Ist diese Abbildung *injektiv* oder *surjektiv* oder *beides*?

b) Eines Tages kommt ein Bus mit unendlich vielen Einzelgästen an. Der gewiefte Hotelchef Monsieur Ilbert kann aber auch dieses Problem lösen. Welche Zimmerumbuchungsfunktion $g : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ steht ihm dafür zur Verfügung?

c) ($*$)-*Aufgabe* (*5 Zusatzpunkte*):
Als es nun um die konkrete Zimmerverteilung geht, bekommt Monsieur Ilbert von den der Reihe nach vortretenden Reisegästen folgende Sonderwünsche zu hören: Der erste neue Gast möchte keinen seiner Mitreisenden als Zimmernachbarn. Dann folgen zwei Gäste, die gern nebeneinander, aber getrennt von den anderen Busreisenden untergebracht werden wollen. Darauf erscheint ein Trio, welches ebenfalls nebeneinander, aber getrennt von den übrigen Mitreisenden einquartiert werden möchte, woraufhin 4 Reisende ihren entsprechenden Wunsch äußern usw. usw.

Kann der schwer geprüfte Hotelchef Herr Ilbert auch dieses Problem mittels Zimmerumbuchungsfunktion $h : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ lösen? Man fertige dazu ein Pfeildiagramm zur Zimmerumbelegung mit einem entsprechendem Neubelegungsplan an.

	10,0

22. Aufgabe:

Bilden Sie für die folgenden gegebenen Funktionen f und g jeweils die Funktionen $g - f$, $f{\cdot}g$, $\dfrac{f}{g}$ sowie $f \circ g$ und $g \circ f$ und geben Sie dabei zusätzlich die jeweils *maximalen* Definitionsbereiche D_f, D_g, D_{g-f}, $D_{f\cdot g}$, $D_{f:g}$, $D_{f\circ g}$ und $D_{g\circ f}$ an.

Ü (a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$; **H** (b) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

	6,0

23. Aufgabe:

Suchen Sie zu den folgenden gegebenen Funktionen f jeweils die Funktionsvorschrift für die zugehörige Umkehrfunktion f^{-1} und bestimmen Sie für beide Funktionen jeweils den entsprechenden *maximalen* Definitionsbereich.

Ü (a) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$; **Ü** (b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$; **H** (c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

	6,0