Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

WiSe 2013/14
02.11.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

2. Übungsblatt zur „Analysis I (lehramtsbezogen)“

(Abgabe der Hausaufgaben: *12.11.2013*)

9. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Eine gewisse Anzahl roter, weißer und blauer Verzehrbons werden auf einer studentischen Party an 100 Teilnehmer verteilt. Es ist bekannt, daß 45 Leute rote Marken bekommen, 45 weiße, 60 blaue, 15 rote und weiße, 25 weiße und blaue, 20 rote und blaue und 5 alle drei Farben (Man beachte: *Die angegebenen Teilnehmergruppen sind nicht als disjunkt vorausgesetzt*). Unter Verwendung eines Venn-Diagramms und unter Verwendung geeigneter Bezeichungen für die betrachteten Mengen beantworte man folgende Fragen:

a) Wieviele Teilnehmer bekommen keine Marke?

b) Wieviele bekommen genau eine?

c) Wieviele bekommen genau zwei?

d) Wieviele bekommen eine weiße Marke, aber keine blaue?

Tipp: Benutzen Sie $card(A)$ für die Kardinalzahl (= Anzahl der Elemente) einer Menge A .

10. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Ein Biologe schickt bei einem Experiment 50 Mäuse durch ein Labyrinth. Anschließend erstellt er folgenden Bericht:

25 Mäuse waren männlich; 25 waren vorher abgerichtet; 20 liefen am ersten Abzweigepunkt nach links; 10 waren vorher abgerichtete Männchen; 4 männliche Mäuse gingen nach links; 15 vorher abgerichtete Mäuse liefen nach links, von diesen 15 waren 3 männlich.

Erstellen Sie unter Rückgriff auf geeignet gewählte und bezeichnete Teilmengen des Grundraums Ω ein vollständig beziffertes Venn-Diagramm, und leiten Sie daraus die Zahl der weiblichen Mäuse her, die weder vorher abgerichtet waren noch nach links liefen. Um welche Menge handelt es sich hierbei?

	6,0

11. Aufgabe:

Die Grundmenge (*Grundraum* genannt) Ω bestehe aus allen möglichen Ergebnissen des gleichzeitigen Werfens einer Ein-Cent-, einer Zwei-Cent- und einer Fünf-Cent-Münze. Jede dieser Münzen hat dabei eine nationale Seite mit einem Wappen und eine europäische Seite mit der entsprechenden Zahl. Wir schreiben im Folgenden *„0“* für *Wappen* und *„1“* für *Zahl.*

Ü a) Geben Sie Ω konkret in beschreibender und in aufzählender Schreibweise an sowie

(i) die Teilmenge (*Ereignis* genannt) $A \subseteq \Omega$, bestehend aus den möglichen Ergebnissen, bei welchen die Ein-Cent-Münze das Wappen zeigt,

(ii) die Teilmenge (bzw. das *Ereignis*) $B \subseteq \Omega$, bestehend aus den möglichen Ergebnissen, bei welchen alle drei Münzen das Gleiche zeigen, sowie

(iii) die Teilmenge (bzw. das *Ereignis*) $C \subseteq \Omega$, bestehend aus den Ergebnissen, bei welchen die Anzahl der Wappen größer ist als die Anzahl der Zahlen.

H b) Bilden Sie aus den in (a) vorgegebenen Teilmengen (Ereignissen) folgende neue Ereignisse und beschreiben Sie diese sowohl aufzählend als auch beschreibend in Worten:

$A^C,\ B^C,\ A \cup B,\ A^C \cup C,\ A \cap B^C,\ A^C \cap C^C,\ (A^C \cap B) \cup C,\ (A^C \cap B) \cap C^C$.

	8,0

12. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Ausgehend vom Zahlbereich $(\boldsymbol{N}, +, \cdot)$ wollen wir den Zahlbereich $\boldsymbol{Z}$ einführen. Ausgangspunkt ist die Frage nach der allgemeinen Lösbarkeit der Gleichung $(*)$ $b + x = a$ für $a,b \in \boldsymbol{N}$ beliebig. Dazu wird die Gleichung $(*)$ mit dem geordneten Paar $(a,b) \in \boldsymbol{N}^2 = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ “identifiziert“.

a) Zeigen Sie: Durch die Definition $(a,b) \sim (c,d) \;:\Leftrightarrow\; a + d = b + c$ wird auf $\boldsymbol{N}^2 = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ eine *Äquivalenzrelation* eingeführt. Skizzieren Sie in $\boldsymbol{N}^2$ die entsprechenden *Äquivalenzklassen* $[a,b]$ für die Paare $(a,b) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$.

b) Durch $[a,b] + [c,d] := [a + c\,,\, b + d]$ (A) und $[a,b] \cdot [c,d] := [ac + bd\,,\, ad + bc]$ (M) werden auf der Menge der Äquivalenzklassen $\boldsymbol{N}^2/\!\sim$ zwei *wohldefinierte* Operationen – *Addition* und *Multiplikation* genannt – eingeführt. Zeigen Sie dazu:

(A) $(a,b) \sim (a',b') \wedge (c,d) \sim (c',d') \;\Rightarrow\; (a + c\,,\, b + d) \sim (a' + c'\,,\, b' + d')$,

(M) $(a,b) \sim (a',b') \wedge (c,d) \sim (c',d') \;\Rightarrow\; (ac + bd\,,\, ad + bc) \sim (a'c' + b'd',\, a'd' + b'c')$.

c) Definiert man $\boldsymbol{Z}$ als die Menge $\boldsymbol{N}^2/\!\sim$ der Äquivalenzklassen und $\boldsymbol{0} := [1,1]$ sowie zu $\boldsymbol{x} = [a,b]$ die Zahl $-\boldsymbol{x} := [b,a]$, so bildet $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$ einen *Integritätsring* mit $\boldsymbol{1} = [2,1]$ als *Einselement*.

d) Durch die Abbildung $\varphi : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}^2/\!\sim$ mit $\varphi(n) = [n+1,\, 1]$, $n \in \boldsymbol{N}$ wird der „alte“ Bereich $\boldsymbol{N}$ der natürlichen Zahlen strukturverträglich in den neuen Zahlbereich $\boldsymbol{Z}$ *eingebettet*. Dabei gilt: $\forall m,n \in \boldsymbol{N}:\ \varphi(m + n) = \varphi(m) + \varphi(n) \;\wedge\; \varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

e) Die Gleichung $(*)$ $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ ist nun in $\boldsymbol{Z}$ für beliebige $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Z}$ eindeutig lösbar. Die Lösung ist dann $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

13. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Ausgehend vom soeben eingeführten Integritätsbereich $(\boldsymbol{Z}, +, \cdot)$ wollen wir nun analog wie in Aufgabe 12 den Zahlbereich $\boldsymbol{Q}$ der rationalen Zahlen einführen. Ausgangspunkt ist die Frage nach der allgemeinen Lösbarkeit der Gleichung $(**)$ $b \cdot x = a$ für $a,b \in \boldsymbol{Z}$, $b \neq 0$ beliebig. Dazu wird die Gleichung $(**)$ mit dem geordneten Paar $(a,b) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}^*$, $\boldsymbol{Z}^* = \boldsymbol{Z} - \{\boldsymbol{0}\}$ “identifiziert“.

a) Zeigen Sie: Durch die Definition $(a,b) \sim (c,d) \;:\Leftrightarrow\; a \cdot d = b \cdot c$ wird auf $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}^*$ eine Äquivalenzrelation eingeführt. Skizzieren Sie in $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}^*$ die entsprechenden Äquivalenzklassen $[a,b]$ für die Paare $(a,b) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(-1,2),(-2,1),(0,1)\}$.

b) Durch $[a,b] + [c,d] := [ad + bc\,,\, bd]$ (A) und $[a,b] \cdot [c,d] := [ac,\, bd]$ (M) werden auf der Menge der Äquivalenzklassen $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}^*/\!\sim$ zwei „wohldefinierte“ Operationen – *Addition* und *Multiplikation* genannt – eingeführt. Zeigen Sie dazu:

(A) $(a,b) \sim (a',b') \wedge (c,d) \sim (c',d') \;\Rightarrow\; (ad + bc\,,\, bd) \sim (a'd' + b'c'\,,\, b'd')$,

(M) $(a,b) \sim (a',b') \wedge (c,d) \sim (c',d') \;\Rightarrow\; (ac\,,\, bd) \sim (a'c',\, b'd')$.

c) Definiert man $\boldsymbol{Q}$ als die Menge $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}^* /\sim$ der Äquivalenzklassen und $\boldsymbol{0} := [0,1]$ sowie $\boldsymbol{1} := [1,1]$ und zu $\boldsymbol{x} = [a,b]$ die Zahl $-\boldsymbol{x} := [-a,b]$ und im Fall $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ die Zahl $\boldsymbol{x}^{-1} = [b,a]$, so bildet $(\boldsymbol{Q}, +, \cdot)$ einen Körper.

d) Durch die Abbildung $\psi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}^* /\sim$ mit $\psi(a) = [a, 1]$, $a \in \boldsymbol{Z}$ wird der „alte" Bereich $\boldsymbol{Z}$ der ganzen Zahlen strukturverträglich in den neuen Zahlbereich $\boldsymbol{Q}$ eingebettet. Dabei gilt: $\forall m,n \in \boldsymbol{Z} : \varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n) \wedge \varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

e) Die Gleichung $(*)$ $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ ist nun in $\boldsymbol{Q}$ für beliebige $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Q}$ mit $\boldsymbol{b} \neq 0$ eindeutig lösbar. Die Lösung ist dann $\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^{-1}$.

	16,0