

Kap 2: Mengen**Kap. 2.1: Mengen und Mengenbeziehungen**

Der Begriff *Menge* ist so fundamental, dass man zu seiner Erklärung eigentlich nur Synonyme, wie z.B. *Zusammenfassung*, *Gesamtheit* oder *Haufen*, bzw. Beispiele von Mengen anführen kann. Selbst die oft zitierte „Definition“ des Begriffs Menge durch *Georg Cantor (1845 – 1918)*, den Begründer der Mengenlehre, ist in diesem Sinne eigentlich vielmehr als *Erklärung* zu verstehen, mit der Cantor den mathematischen Inhalt des Mengenbegriffs zu umschreiben versucht.

Aufgrund dieser Tatsache spricht man daher auch von einem *intuitiven Verständnis* des Begriffs Menge. Trotz dieser Einschränkung wollen wir Cantors Formulierung zum Begriff Menge hier als *grundlegende Definition* anführen:

Definition 1: (nach Georg Cantor, 1895):

„Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die *Elemente* von *M* genannt werden, zu einem Ganzen“

An diese Erklärung schließen sich einige Bemerkungen an:

Bemerkungen:

1. Von der „Definition“ Cantors ausgehend soll von jedem beliebigen Objekt eindeutig aussagbar sein, ob es zu einer gegebenen Menge *M* gehört oder nicht.
2. Obwohl von Zusammenfassung die Rede ist, sind auch Mengen zugelassen, welche kein Element (die *leere Menge*) oder genau ein Element (die sogenannten *Elementarmengen*) enthalten.
3. Da die Objekte in dieser Menge „bestimmt“ und „wohlunterschieden“ sein sollen, sind im *mathematischen* Sinne Formulierungen wie z.B. „eine Menge Wasser“ oder „eine Menge Zucker im Kaffee“ ausgeschlossen.
4. Objekte, die zu Mengen zusammengefasst werden dürfen, können nach Cantor „Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens“ sein. Damit sind als Objekte beispielsweise zulässig: *belebte oder unbelebte körperliche Dinge, Vorgänge, Tätigkeiten, Ereignisse, sprachliche Gebilde* oder auch *gedankliche Gegenstände*.

Schreibweise:

Wir werden im Folgenden – wie in der Mathematik i.a. üblich – Mengen mit Großbuchstaben (also *A, B, C, ...*) und Elemente mit Kleinbuchstaben (also *a, b, c, ...*) bezeichnen.

Für die Beziehung zwischen Elementen und Mengen verwenden wir die Symbole „ \in “ und „ \notin “ mit folgender Lesart:

$a \in M$: „*a* ist Element der Menge *M*“ bzw. „*a* gehört zu *M*“ bzw. „*a* ist aus *M*“
 $a \notin M$: „*a* ist nicht Element der Menge *M*“ bzw. „*a* gehört nicht zu *M*“ bzw. „*a* ist nicht aus *M*“ .

Zur Kennzeichnung der Menge als *Zusammenfassung* von Objekten verwendet man die *geschweiften Mengenklammern* „{“ und „}“, wie z.B. im Fall von

$S = \{\text{München, Paris, London, New York}\}$ oder $A = \{2, 3, 5, 7\}$ oder $B = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$.

Dann gilt z.B.: $\text{Madrid} \notin S$, $5 \in A$, $\heartsuit \notin A$, $\diamond \in B$.

Bei der Festlegung einer Menge sind im Wesentlichen *zwei* verschiedene Verfahren zu unterscheiden, nämlich

a) das *aufzählende Verfahren*:

Hierbei werden die Elemente, die in der Menge zusammengefasst werden, explizit angegeben. Dieses Verfahren ist nur für *endliche Mengen* anwendbar. Außerdem ist dabei zu beachten:

Bei der Aufzählung kommt es auf die Reihenfolge der Elemente *nicht* an, und es ist gleichgültig, ob ein Element *mehrfach* aufgezählt wird oder nur *einfach*.

Damit gilt z.B.:

$$A = \{2, 3, 5, 7\} = \{5, 3, 7, 2\} = \{2, 3, 3, 5, 2, 7, 5, 5\}$$

b) das *beschreibende Verfahren*:

In diesem Fall wird der sogenannte *Mengenbildungsoperator* in Verbindung mit einer *prädikativen Aussageform* verwendet. Ist z.B. $p(x)$ irgendeine prädikative Aussageform in einer Variablen x und G der zugrunde gelegte Individuenbereich (hier *Grundmenge*

genannt) für x , so schreibt man: $A = \{x \in G \mid p(x)\}$

und sagt: „ A ist die Menge aller x aus G , für die $p(x)$ wahr ist“.

Insbesondere gilt dann für ein beliebiges Objekt (Individuum) a :

$a \in A$ genau dann, wenn $p(a)$ wahr ist, und $a \notin A$ genau dann, wenn $p(a)$ falsch ist.

Bemerkungen:

1) Bei Verwendung des *Mengenoperators* spielt es keine Rolle, wie man die *Variable* benennt. Damit gilt z.B. allgemein:

$$A = \{x \in G \mid p(x)\} = \{t \in G \mid p(t)\}$$

2) In Büchern findet man zuweilen als andere Schreibweisen für den *Mengenoperator*:

$$A = \{x \in G : p(x)\} \text{ bzw. } A = \{x \in G ; p(x)\}$$

Entsprechend sind für die Angabe der *Grundmenge* bei der Mengenbildung auch andere symbolische Schreibweisen gebräuchlich, nämlich

$$A = \{x \mid p(x)\}_G \text{ sowie } A = \{x \mid x \in G \wedge p(x)\}.$$

Im letzten Fall sagt man auch entsprechend:

„ A ist die Menge aller x mit: x ist aus G und $p(x)$ ist wahr“.

3) Im Falle *unendlicher* Mengen oder größerer *endlicher* Mengen kommt zuweilen auch eine *Zwischenform* der soeben beschriebenen zwei Verfahren zum Einsatz. Dabei verwendet man das Symbol „...“, wenn für die Folge der Objekte, welche in der entsprechenden Menge zusammengefasst sind, ein eindeutiges Bildungsgesetz erkennbar ist. Beispiele hierfür sind

$A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$: die *endliche Menge* der ganzen Zahlen von 1 bis 20 ,

$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: die *unendliche Menge* der positiven ganzen Zahlen einschließlich der 0 und

$B = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$: die *unendliche Menge* der Quadratzahlen.

Wir kommen nun zu einigen speziellen Mengen:

Definition 2:

1. Die Menge $\{x \mid x \neq x\}$, welche *kein* Element enthält (da kein Objekt von sich selbst verschieden ist), nennt man die *leere Menge* und schreibt symbolisch für sie \emptyset bzw. $\{\}$.
2. Ist x ein beliebiges Objekt, so nennt man die Menge $A = \{x\}$ die zu x gehörige *Elementarmenge* oder *Einermenge*.

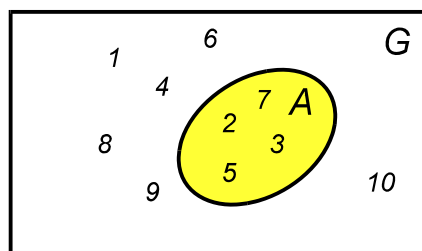
Bemerkungen:

1. Entsprechend der *leeren Menge* bildet man manchmal auch die Menge $\{x \mid x = x\}$, welche *alle* möglichen Objekte als Elemente enthält. Diese Menge wird auch *Allmenge* genannt. Allerdings sind solche Mengen mit größter Vorsicht zu genießen (s. weiter unten).
2. Ist $p(x)$ eine beliebige prädikative Aussageform, so lässt sich auch die *leere Menge* mittels folgender Kontradiktion beschreiben:

$$\emptyset = \{x \mid p(x) \wedge \neg p(x)\}$$

Zur visuellen Veranschaulichung von Mengen:

Um Mengen (und Mengenbeziehungen) graphisch zu veranschaulichen, verwendet man oft sogenannte *Venn-* oder *Eulerdiagramme*, bei denen die entsprechende Grundmenge häufig durch ein Rechteck und innerhalb dieser Grundmenge gebildete Mengen durch geschlossene kreisförmige oder ovale Kurven symbolisiert werden. Falls es sich hierbei um endliche Mengen handelt, werden oft die Objekte in Form entsprechender Symbole mit in das Diagramm eingefügt.



Venn- oder Eulerdiagramm für $G = \{1, 2, \dots, 10\}$ und $A = \{2, 3, 5, 7\}$

Wir behandeln nun zu zwei wichtige Mengenbeziehungen: die *Inklusion von Mengen (Teil-mengenbeziehung)* und die *Gleichheit von Mengen*.

Definition 3:

Sind A und B zwei beliebige Mengen (endlich oder unendlich), so heißt (heißen)

- (1) A eine *Teilmenge* (oder *Untermenge*) von B bzw. B eine *Erweiterungsmenge* (oder *Obermenge*) von A (in Zeichen: $A \subseteq B$), falls folgende Allaussage wahr ist:

$$\boxed{\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)}$$

- (2) A und B *gleich* (in Zeichen: $A = B$), falls folgende Allaussage wahr ist:

$$\boxed{\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)}$$

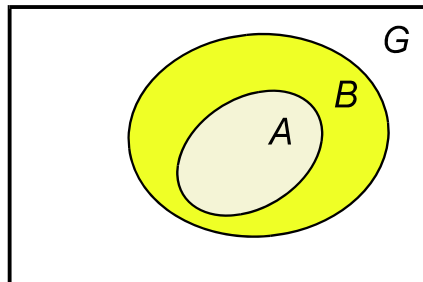
Bemerkungen:

- 1) Die Teilmengenbeziehung $A \subseteq B$ umschließt den Fall der Mengengleichheit $A = B$.

2) Liegen A und B in der *Grundmenge* G , so können Teilmenge und Gleichheit leicht modifiziert formuliert werden, wie folgt:

$$\boxed{\forall x \in G: x \in A \rightarrow x \in B} \quad \text{und} \quad \boxed{\forall x \in G: x \in A \leftrightarrow x \in B}$$

3) Mittels eines *Venn*diagramms lässt sich die Teilmengenbeziehung $A \subseteq B$ zwischen zwei Mengen A und B wie folgt darstellen:



Aufgrund der Eigenschaften der (materiellen) Implikation, dem Zusammenhang zwischen (materieller) Äquivalenz und (materieller) Implikation sowie der Gesetze der Prädikatenlogik lässt sich folgender Satz beweisen:

Satz 1:

Seien A und B zwei beliebige Mengen. Dann gilt stets:

(1) $\boxed{\emptyset \subseteq A}$, (2) $\boxed{A \subseteq A}$ und (3) $\boxed{A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A}$

Die Aussage (3) in Satz 1 wird häufig benutzt, um die Gleichheit zweier Mengen A und B konkret nachzuweisen. Dies soll im Folgenden durch ein Beispiel gezeigt werden.

Beispiel:

Man betrachte als *Grundmenge* die Menge $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ der *ganzen Zahlen*. Außerdem seien die Mengen A und B gegeben durch $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 = 1\}$ und $B = \{-1, 1\}$. Wir wollen zeigen: $A = B$.

Beweis:

Aufgrund von Satz 1 (3) reicht es, (i) $B \subseteq A$ und (ii) $A \subseteq B$ einzeln nachzuweisen.

(i) $B \subseteq A$: Für alle $x \in \mathbf{Z}$ gilt:

$$x \in B \Rightarrow (x = 1 \vee x = -1) \Rightarrow (x^2 = 1^2 = 1 \vee x^2 = (-1)^2 = 1) \Rightarrow x \in A.$$

Also folgt damit: $B \subseteq A$.

(ii) $A \subseteq B$: Für alle $x \in \mathbf{Z}$ gilt:

$$x \in A \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow (x - 1 = 0) \vee (x + 1 = 0) \Rightarrow (x = 1) \vee (x = -1) \Rightarrow x \in B.$$

Also folgt damit: $A \subseteq B$.

Mit (i) und (ii) erhält man somit: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$, also nach Satz 1 (3): $A = B$. □

Wir wollen jetzt eine spezielle Menge betrachten, deren Elemente selbst Mengen sind:

Definition 4:

Ist A eine beliebige Menge (endlich oder unendlich), so heißt die Menge aller Teilmengen von A die *Potenzmenge von A* . Symbolisch geschrieben:

$$\wp(A) := \{ M \mid M \subseteq A \}$$

Bemerkungen:

1. Wegen Satz 1 gilt stets: $\emptyset \in \wp(A)$ und $A \in \wp(A)$, d.h. es ist also immer $\wp(A) \neq \emptyset$.
2. Für $A = \emptyset$ gilt speziell: $\emptyset \subseteq \emptyset$; gleichzeitig ist $A = \emptyset$ die einzige Teilmenge von \emptyset . Also folgt in diesem Fall:

$\wp(\emptyset) = \{ \emptyset \}$, d.h. die Potenzmenge ist eine *Elementarmenge*, beinhaltet also nur ein Element. Insbesondere gilt somit: $\{\emptyset\} \neq \emptyset$.

3. Ist A eine *Elementarmenge*, also z.B. $A = \{a\}$, dann folgt:

$\wp(A) = \{ \emptyset, \{a\} \} = \{ \emptyset, A \}$ mit $A \neq \emptyset$. Somit enthält die Potenzmenge zwei verschiedene Elemente.

4. Ist nun $A = \{a, b\}$ mit $a \neq b$, so folgt für die Potenzmenge von A :

$\wp(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \} = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, A \}$. Also enthält in diesem Fall die Potenzmenge vier verschiedene Elemente.

5. Insgesamt kann man zeigen, dass es zu einer Menge mit n verschiedenen Elementen genau 2^n verschiedene Teilmengen gibt, also die Potenzmenge selbst genau 2^n verschiedene Elemente besitzt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts zeigen wir noch einmal, wie problematisch es werden kann, wenn man sogenannte *Allmengen* oder der *Menge aller Mengen* uneingeschränkt zulässt. In diesem Fall ist *äußerste Vorsicht* geboten, da man bei Gebrauch dieser „Objekte“ leicht auf sogenannte *Antinomien* (d.h. logische Widersprüche) stoßen kann. Ein besonders berühmtes Beispiel ist die vom Mathematiker, Philosophen und Logiker *Bertrand Russell* stammende Antinomie. Dazu betrachtet man Mengen, deren Elemente wieder Mengen sind. Nimmt man speziell die *Menge aller Mengen* als *Grundmenge* G und bildet im Rahmen dieser Grundmenge die Menge $R = \{ X \in G \mid X \notin X \}$, so führt einen die Frage, ob $R \in R$ oder $R \notin R$ gilt, in beiden Antwortfällen zu einem *logischen Widerspruch*. Da dies wahrscheinlich für die meisten Leser aufgrund seiner Abstraktheit als ziemlich starker Tobak erscheinen dürfte, wollen wir dieser Antinomie eine leichter „verdauliche“ Fassung in Anlehnung an den Mathematiker (und Logiker) *B. Russell* geben:

Beispiel:

In einem Dorf lebte ein *Barbier*, der neben den Haaren auch die *Bärte* der männlichen Dorfbewohner versorgte. Da seine Rasierkunst besonders beliebt war, hatte der arme Barbier bald alle Hände voll zu tun und kam kaum noch zum Haarschneiden, was ihn und viele seiner Kunden sehr verdrießte. Um der ausufernden Rasiertätigkeit entgegenzutreten, brachte der Barbier eines Tages vor seinem Laden ein Schild an, auf dem zu lesen war:

Ab heute rasiere ich nur noch die männlichen Dorfbewohner, die sich nicht selbst rasieren können.

Damit hatte sich aber der arme Barbier eine logische Falle gestellt, denn die nun für ihn unlösbare Frage lautete: Gehörte er selbst zu denen, die er rasierte oder nicht? Oder: Durfte er sich weiterhin rasieren oder nicht? ¹⁾

Wenn wir diese Geschichte in die mengentheoretische Sprache einkleiden, so erhalten wir das folgende Resultat:

Sei die Grundmenge G die Menge aller männlichen Einwohner des Dorfes, R die Menge aller $x \in G$, die sich nicht selbst rasieren können und b das Objekt „Barbier“, der nur alle $x \in R$ rasiert. Dann lautet die Frage, die sich für b stellt: Gilt $b \in R$ oder gilt $b \notin R$?

Angenommen, es ist $b \in R$, so heißt dies: Der Barbier kann sich nicht selbst rasieren. Dann aber folgt, dass der Barbier sich rasieren muss, weil er zur Menge R gehört. Also gilt *nicht*, dass der Barbier sich nicht selbst rasieren kann. Damit folgt schließlich $b \notin R$ im Widerspruch zu der Voraussetzung.

Anders herum: Ist $b \notin R$, so ist der Barbier jemand, der sich selbst rasieren kann. Damit gehört er also zu dem Kreis der männlichen Dorfbewohner, die der Barbier rasiert, also zur Menge R im Widerspruch zur Voraussetzung.

Man sieht: Die hier vorgenommene Mengenbildung R ist *unzulässig*, da sie auf Widersprüche führt. Hätte allerdings der Barbier auf seinem Schild die Formulierung „nur noch“ weglassen, so wäre sein Seelenfrieden gerettet gewesen. Aber dann hätte ihm das Schild auch nichts gebracht, da ja weiterhin alle beliebigen männlichen Dorfbewohner zu ihm zum Rasieren hätten kommen können.

Kap. 2.2: Mengenoperationen

Auf der Grundlage der Logik ergeben sich nun Möglichkeiten, sogenannte *Mengenoperationen* zu definieren, mit deren Hilfe aus bestehenden Mengen neue Mengen konstruiert werden können. Es wird sich zeigen, dass die Mengenoperationen dabei ähnlichen Gesetzen genügen wie die Rechenoperationen zwischen den Zahlen, weshalb man auch von einer *Mengenalgebra* spricht.

Definition 5: (Konstruktion neuer Mengen aus bekannten Mengen)

Seien A und B zwei beliebige Mengen. Dann heißt:

- (1) $A \cap B := \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$ die *Schnittmenge* (der *Durchschnitt*) von A und B , und man sagt: „ A geschnitten B gleich ...“ ,
- (2) $A \cup B := \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$ die *Vereinigungsmenge* (*Vereinigung*) von A und B , und man sagt: „ A vereinigt B gleich ...“ ,
- (3) $A \setminus B := \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$ die *Differenzmenge* (*Differenz*) von A und B , und man sagt: „ A ohne B gleich ...“ .

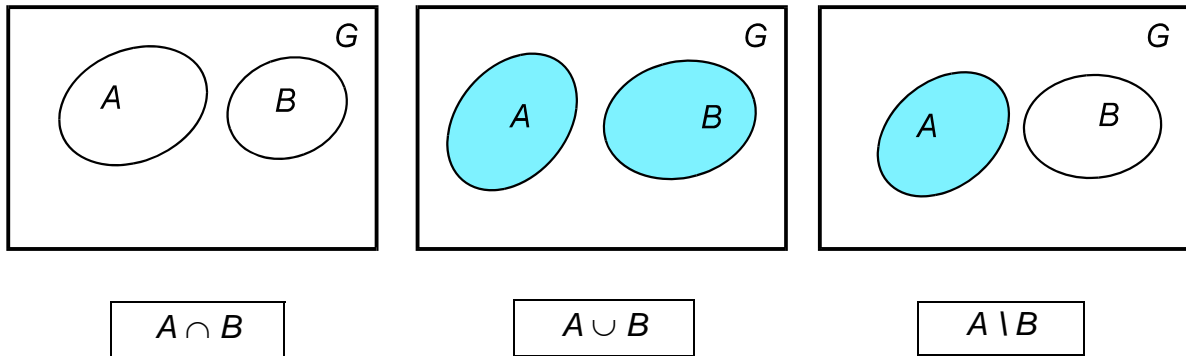
Speziell heißen A und B *disjunkt* oder *elementfremd*, wenn gilt: $A \cap B = \emptyset$

¹⁾ Über dem Grübeln nach der Antwort zu dieser Frage soll der Barbier einen dicken „Philosophenbart“ bekommen haben und erwerbslos geworden sein.

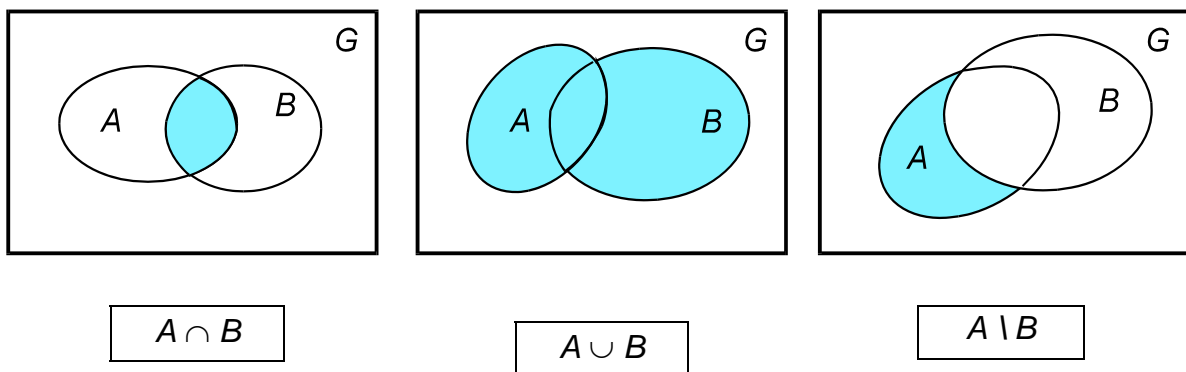
Bemerkung:

Die Mengen, die man aufgrund dieser Operationen erhält, lassen sich wieder mittels *Venn-Diagrammen* veranschaulichen, wenn man wieder G als gemeinsame *Grundmenge* für A und B voraussetzt:

a) im *disjunkten* Fall ($A \cap B = \emptyset$):



b) im *nicht disjunkten* Fall ($A \cap B \neq \emptyset$):



In Bezug auf die Differenz betrachtet man insbesondere den Spezialfall der Differenzmenge bezüglich einer gegebenen *Grundmenge* G :

Definition 6:

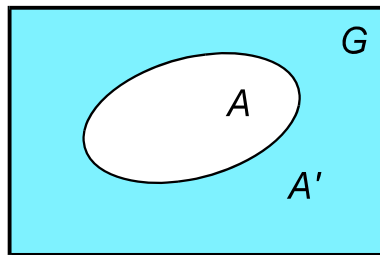
Sei A eine beliebige Menge und G die gegebene Grundmenge. Dann heißt die Menge

(4) $A' := G \setminus A = \{ x \in G \mid x \notin A \}$ die *Komplementärmenge* (das *Komplement*) von A bezüglich G , und man sagt: „ A Komplement gleich ...“.

Bemerkungen:

1. Für das Komplement sind auch noch andere Schreibweisen im Gebrauch, wie z.B.: \bar{A} und A^c .
2. Die Komplementärmenge A' heißt manchmal auch *Ergänzungsmenge* oder *Restmenge* von G bezüglich A , denn es gilt: $A \cup A' = G, A \cap A' = \emptyset$.

3. Mittels *Venn-Diagramm* erhält man folgende Veranschaulichung des Komplements A' :

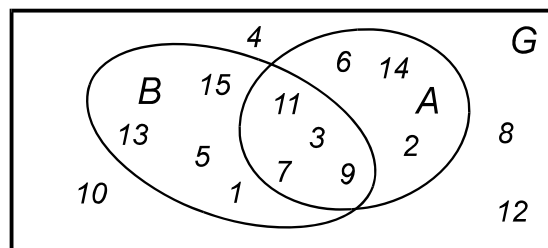


Beispiel:

Seien $A = \{2, 3, 6, 7, 9, 11, 14\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ und $G = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$.
Dann gilt:

$A \cap B = \{3, 7, 9, 11\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15\}$, $A \setminus B = \{2, 6, 14\}$, $B \setminus A = \{1, 5, 13, 15\}$, $A' = \{1, 4, 5, 8, 10, 12, 13, 15\}$, $B' = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.

Skizze zum Beispiel:



Für die Verknüpfung von Mengen mittels *Vereinigung* und *Durchschnitt* sowie das *Komplement* gelten analog zur Aussagenlogik entsprechende *Gesetze der Mengenalgebra*:

| | Durchschnitt „\cap“ | Vereinigung „\cup“ |
|--|--|--|
| <i>Assoziativgesetze</i> | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| <i>Kommutativgesetze</i> | $A \cap B = B \cap A$ | $A \cup B = B \cup A$ |
| <i>Distributivgesetze</i> | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| <i>Absorptionsgesetze</i> | $A \cap (A \cup B) = A$ | $A \cup (A \cap B) = A$ |
| <i>Idempotenzgesetze</i> | $A \cap A = A$ | $A \cup A = A$ |
| <i>Gesetz für das Komplement</i> | $A \cap A' = \emptyset$ | $A \cup A' = G$ |
| <i>Gesetz des doppelten Komplements</i> | $(A')' = A$ | |
| <i>De Morgans Gesetze</i> | $(A \cap B)' = A' \cup B'$ | $(A \cup B)' = A' \cap B'$ |
| <i>Operationen mit \emptyset und G</i> | $G \cap A = A$ $\emptyset \cap A = \emptyset$ | $\emptyset \cup A = A$ $G \cup A = G$ |
| | $\emptyset' = G$, $G' = \emptyset$ | |

Bemerkung:

1. Eine Betrachtung der Gesetze der Mengenalgebra zeigt eine gewisse Verwandtschaft mit den Rechenregeln bei Zahlen: Die *Mengenoperationen* „ \cap “, „ \cup “ und Komplementbildung sind dabei in einem gewissen Umfang mit den Rechenoperationen „+“, „ \cdot “ und der Vorzeichenbildung „-“ vergleichbar. Außerdem spielen die *leere* und die *Grundmenge* in der Mengenalgebra eine ähnliche Rolle wie die Zahlen 0 und 1 bei den Rechengesetzen.
2. Im Gegensatz zu den Rechengesetzen gilt bei der Mengenalgebra ein strenges *Dualitätsprinzip*, wie der Vergleich zweier jeweils nebeneinander stehender Gesetze in der Tabelle zeigt:

Die konsequente Vertauschung von „ \cap “ und „ \cup “ sowie von „ \emptyset “ und „ G “ in einer der Gesetze (Identitäten) zwischen Mengen ergibt wieder ein neues Mengengesetz bzw. eine neue Mengenidentität.

Durch den folgenden Satz wird ein wichtiger Zusammenhang zwischen der *Mengeninklusion* (d.h. *Teilmengenbeziehung*) und den Mengenoperationen *Vereinigung*, *Durchschnitt* und *Komplement* gegeben, der auch oft für eine äquivalente Formulierung der Teilmengenbeziehung benutzt wird:

Satz 2:

Seien A und B zwei beliebige Mengen. Dann gilt:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B' = \emptyset \Leftrightarrow A' \cup B = G$$

Für die Mengeninklusion lassen sich mittels Satz 2 folgende Eigenschaften nachweisen:

Satz 3:

Sind A , B und C drei beliebige Mengen, so gilt:

- (i) $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$ (Transitivität) ,
- (ii) $(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq B \cap C)$,
- (iii) $(A \subseteq B) \Rightarrow (A \subseteq B \cup C)$ und
- (iv) $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (B' \subseteq A')$.

Beweis von (i) (als Beispiel):

Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt mit Satz 2: $A \cap B = A$ und $B \cap C = B$

Anwendung des Assoziativgesetzes liefert:

$$A \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B = A .$$

Also gilt letztendlich: $A \cap C = A$ und damit nach Satz 2 : $A \subseteq C$.

Kap. 2.3: Geordnete Paare und Cartesisches Produkt

Es erscheint sowohl in der Realität als auch in der Mathematik (als „Abbild der Realität“) zuweilen notwendig, gewisse Objekte als aus Einzelobjekten zusammengesetzt zu betrachten,

so z.B. „Namen“ von Personen als Zusammensetzung von „Vornamen“ und „Nachnamen“ oder „Adressen“ als Zusammensetzung aus „Straße“, „Hausnummer“, „Postleitzahl“ und „Ort“. In der Mathematik führt man zur Beschreibung solcher zusammengesetzter Objekte die Begriffe „geordnetes Paar“ und allgemeiner „(geordnetes) n -Tupel“ ein. In diesem Zusammenhang wird auch das „Cartesische Produkt“ von Mengen erklärt:

Definition 7:

Seien A, B zwei Mengen. Geordnete Paare (a, b) sind Objekte mit $a \in A$ und $b \in B$, welche in Bezug auf die Gleichheit die folgende sie charakterisierende Eigenschaft erfüllen:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$$

Im Paar (a, b) heißt a die *erste Komponente* und b die *zweite Komponente des Paares* und spricht bei Gleichheit von Paaren von *komponentenweiser Gleichheit*.

Die Menge $A \times B := \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$ aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ heißt das *Cartesische Produkt* der Mengen A und B .

Bemerkung:

1. Man beachte, dass es sich bei geordneten Paaren (a, b) immer um *Objekte* handelt, während $\{a, b\}$ stets eine *Menge* darstellt.
2. Aufgrund der Eigenschaft der geordneten Paare kommt es im Gegensatz zur aufzählenden Schreibweise von Mengen auf die Reihenfolge der Komponenten an, denn es gilt:

$$(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b$$

Also gilt i.a. $(a, b) \neq (b, a)$, während dazu im Gegensatz immer: $\{a, b\} = \{b, a\}$ ist !!!

3. Man kann geordnete Paare auch mittels Mengen einführen. Man definiert dann:

$$(a, b) := \{ \{a\}, \{a, b\} \} \text{ mit } a \in A \text{ und } b \in B.$$

Für die so eingeführten Objekte (a, b) lässt sich dann die charakteristische Eigenschaft der geordneten Paare (Gleichheit der Paare = Gleichheit der Komponenten) nachweisen.

Beispiele:

1. Sei $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ und $B = \{\clubsuit, \heartsuit\}$. Dann gilt für das Cartesische Produkt:
 $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = \{(\alpha, \clubsuit), (\alpha, \heartsuit), (\beta, \clubsuit), (\beta, \heartsuit), (\gamma, \clubsuit), (\gamma, \heartsuit)\}.$
2. Sei bei einem Partnerspiel $A = \{Bert, Carsten, Levy\}$ die Menge der männlichen und $B = \{Karin, Annett, Mona\}$ die Menge der weiblichen Kandidaten.
 Dann bezeichnet $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ die Menge aller möglichen *gemischten* Kandidatenpaare. In „aufzählender Form“ lässt sich diese Menge angeben, wie folgt:
 $A \times B = \{(Bert, Karin), (Bert, Annett), (Bert, Mona), (Carsten, Karin), (Carsten, Annett), (Carsten, Mona), (Levy, Karin), (Levy, Annett), (Levy, Mona)\}$
 Man erhält insgesamt (wie man sieht) $3 \cdot 3 = 9$ verschiedene „Paarungsmöglichkeiten“ zwischen Elementen in A und Elementen in B .

Das Prinzip der geordneten Paare kann man nun bezüglich der Anzahl an Komponenten verallgemeinern und erhält so die *n -Tupel*:

Definition 8:

Seien A_1, A_2, \dots, A_n n verschiedene (nicht leere) Mengen. Dann ist das *Cartesische Produkt* von A_1, A_2, \dots, A_n definiert durch:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n \},$$

wobei die Elemente (Objekte) *n-Tupel* heißen und aus n *Komponenten* bestehen. Die n -Tupel erfüllen analog zu geordneten Paaren hinsichtlich der Gleichheit die folgende charakterisierende Eigenschaft:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow (a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge \dots \wedge (a_n = b_n)$$

Insbesondere schreibt man im Fall $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ ($n \in \mathbf{N}$) in abkürzender Schreibweise:

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n\text{-mal}} = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in A \}$$

Bemerkung:

Im Fall $n = 3$ spricht man auch von *Tripeln*, im Fall $n = 4$ auch von *Quadrupeln* und im Fall $n = 5$ von *Quintupeln*.

Beispiel:

Eine Einkaufsladenkette hat für ihre Filialen in Deutschland eine SHOP-Datenbank angelegt, in der sie die Adressen verwaltet. Dabei bezeichnet S die Menge aller möglichen Straßennamen, H die Menge aller möglichen Hausnummern, O die Menge aller Ortsnamen sowie P die Menge aller Postleitzahlen in der BRD. Die SHOP-Datenbank ist dann eine Teilmenge von

$$S \times H \times O \times P = \{ (a, b, c, d) \mid a \in S, b \in H, c \in O, d \in P \}.$$

Ein Element ist z.B.: $(\text{Burgstraße}, 13b, \text{Nürnberg}, 90403) \in S \times H \times O \times P$.

Zwei Adressen sind nun als Elemente des Cartesischen Produktes offensichtlich genau dann gleich, wenn sie in allen 4 Adresskomponenten übereinstimmen. *)

Zur graphischen Veranschaulichung eines Cartesischen Produktes gibt es im Wesentlichen folgende Möglichkeiten: (T) die *Tabellendarstellung*, (G) das *Gitternetz* und (B) das *Baumdiagramm*. Alle drei Darstellungsmöglichkeiten sollen an einem Beispiel erläutert werden.

Beispiel:

Wählen wir die Menge $A \times B$ der möglichen Kandidatenpaare aus obigem Partnerspiel mit $A = \{ \text{Bert}, \text{Carsten}, \text{Levy} \}$ und $B = \{ \text{Karin}, \text{Annett}, \text{Mona} \}$, so erhält man:

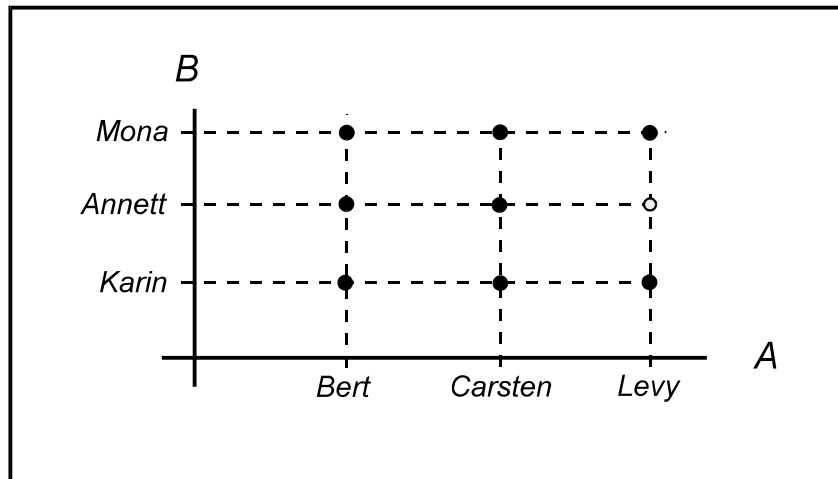
(T) *Tabellendarstellung:*

| | | | |
|--------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| A \ B | Karin | Annett | Mona |
| Bert | $(\text{Bert}, \text{Karin})$ | $(\text{Bert}, \text{Annett})$ | $(\text{Bert}, \text{Mona})$ |

*) In der Mathematik nennt man eine beliebige Teilmenge eines cartesischen Produktes $A_1 \times \dots \times A_n$ eine **Relation**, weshalb man auch, wie z.B. im Falle von $S \times H \times O \times P$, von *relationalen Datenbanken* spricht.

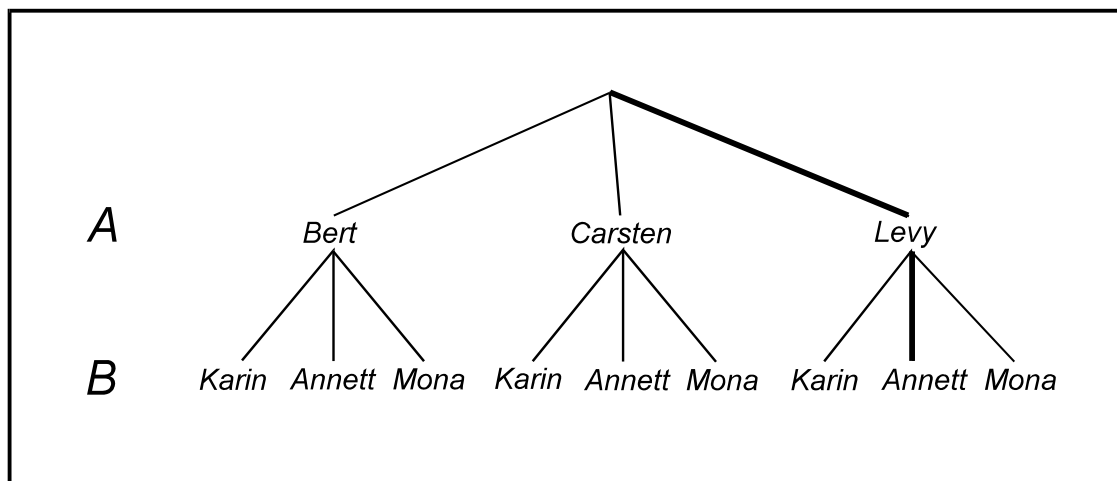
| | | | |
|----------------|--------------------|---------------------|-------------------|
| Carsten | $(Carsten, Karin)$ | $(Carsten, Annett)$ | $(Carsten, Mona)$ |
| Levy | $(Levy, Karin)$ | $(Levy, Annett)$ | $(Levy, Mona)$ |

(G) Gitterdarstellung:



In dem Gitternetz sind die Elemente von $A \times B$ in Form von Punkten dargestellt. Insbesondere steht der weiß markierte Punkt für $(a, b) = (Levy, Annett) \in A \times B$.

(B) Baumdarstellung:

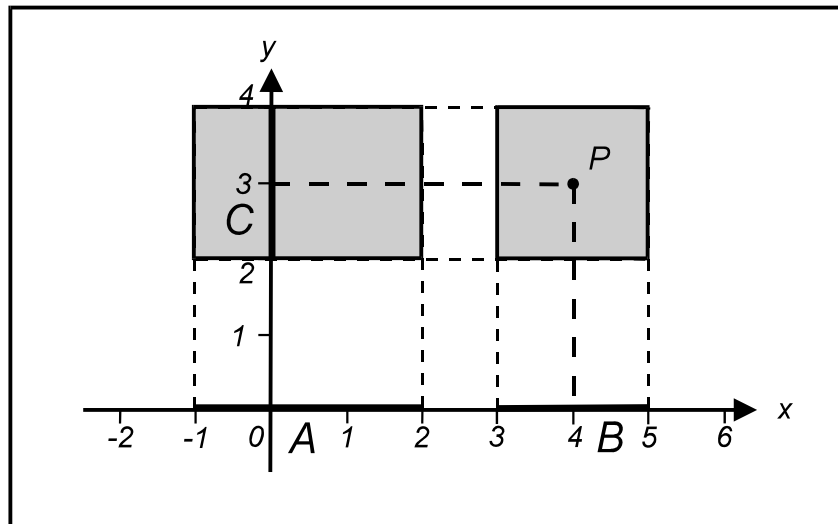


Im Baumdiagramm liest man die Einzelkomponenten eines geordneten Paares von oben nach unten. Damit symbolisiert jeder durchgezogene Pfad ein Element aus $A \times B$. Im vorliegenden Beispiel hat man insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ verschiedene Pfade. Der dicker markierte Pfad beschreibt im Übrigen das Paar: $(a, b) = (Levy, Annett) \in A \times B$.

Baumdiagramme lassen sich auf n-Tupel mit mehreren Komponenten verallgemeinern, indem man die Anzahl der einzelnen „Baumebenen“ im Diagramm entsprechend erhöht.

Handelt es sich bei A und B um reelle Zahlenmengen, so stellt man $A \times B$ im allgemeinen mithilfe eines *Cartesischen Koordinatensystems* dar, in welchem den geordneten Paaren $(a, b) \in A \times B$ die Punkte $P(a, b)$ mit den jeweiligen Koordinaten $x = a$ und $y = b$ der Zeichenebene zugeordnet werden und umgekehrt. Dazu ein Beispiel:

Es soll die Menge $(A \cup B) \times C$ mit $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$ und $C = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$ graphisch veranschaulicht werden. Man erhält als Ergebnis die folgende Darstellung:



Die Mengen A und B sind auf der x -Achse, die Menge C ist auf der y -Achse durch verstärkte Linienführung herausgehoben; die gesuchte Menge $(A \cup B) \times C$ erscheint nun als grau markierte Fläche. Im vorliegenden Fall besteht die darzustellende Menge somit aus 2 Rechteckflächen. Zusätzlich ist der Punkt $P(4,3) \in (A \cup B) \times C$ graphisch dargestellt.

Bemerkung:

Will man ein Cartesisches Produkt der Form $A \times B \times C$ mit Zahlenmengen A, B und C graphisch darstellen, so wählt man ein *dreidimensionales Cartesisches Koordinatensystem*, welches allerdings nur zweidimensional dargestellt wird. Die Cartesischen Produkte sind dann Zusammensetzungen aus dreidimensionalen Quadern.

Kap. 2.4: Zur Anzahl der Elemente in endlichen Mengen

Im Folgenden sollen einige Tatsachen über die Anzahlen endlicher Mengen zusammengetragen werden, die an einem konkreten Beispiel eine Anwendung finden werden. Zunächst die diesem Abschnitt zugrunde liegende Definition:

Definition 9:

Sei $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ eine endliche Menge. Dann bezeichnet $n(A) := m$ die Anzahl der Elemente in A und wird die *Mächtigkeit von A* genannt. Man nennt diese Anzahl auch oft die *Kardinalzahl* der Menge A und schreibt dann: $card(A) = m$.

Bemerkung:

Man findet in Büchern für die Mächtigkeit auch oft die alternative Schreibweise $|A| = m$.

Satz 4:

Seien A und B zwei beliebige endliche Mengen. Dann gilt bezüglich der Mächtigkeit:

- (i) $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ (Mächtigkeit des Cartesischen Produkts) ,
- (ii) $B \subseteq A \Rightarrow n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$ (Mächtigkeit der Differenzmenge)
- (iii) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (Mächtigkeit der Vereinigungsmenge) .

Bemerkung:

1. Teil (i) des Satzes zur Mächtigkeit von $A \times B$ erklärt, warum diese Menge den Namen „Cartesisches Produkt“ trägt. Analog erklärt sich der Name „Differenzmenge“ aus Teil (ii) des Satzes.
2. Für disjunkte Mengen A und B folgt aus (iii) als Spezialfall:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Dies erklärt, warum man anstelle des Begriffs „Vereinigung“ in manchen Büchern auch die Formulierung „Summe von A und B “ verwendet.

Ausgehend von der Mächtigkeit der Vereinigungsmenge zweier disjunkter Mengen und der Mächtigkeit der Differenzmenge im Falle einer Teilmengenbeziehung lässt sich verallgemeinernd ein weiterer wichtiger Satz über die Mächtigkeit beweisen. Allerdings benötigen wir dazu vorher noch den Begriff der „Zerlegung einer Menge“:

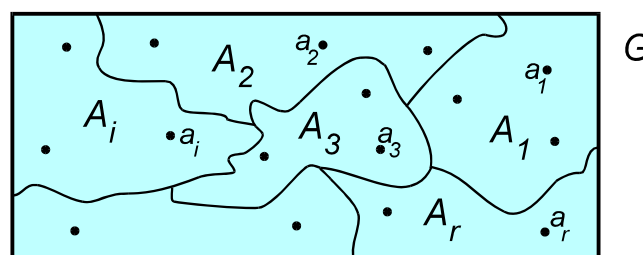
Definition 10:

Sei G eine beliebige Grundmenge und seien A_1, A_2, \dots, A_r r verschiedene nichtleere Teilmengen von G (d.h.: $A_i \subseteq G$, $A_i \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, \dots, r$). Man sagt: A_1, A_2, \dots, A_r bilden eine Zerlegung von G , wenn gilt:

- (i) $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ (d.h. die A_i sind paarweise disjunkt) und
- (ii) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r = G$ (d.h. die A_i „schöpfen“ G ganz aus)

Bemerkung:

1. Mittels Venn-Diagramm lässt sich der Begriff der Zerlegung von G wie folgt veranschaulichen:



Dabei symbolisieren die Punkte in der Skizze die Elemente von G . Insbesondere wird also hier in der Zeichnung vorgegeben: $a_i \in A_i$ für $i = 1, \dots, r$.

2. Ist G Grundmenge und $A \subseteq G$ mit $A \neq \emptyset$, $A \neq G$ beliebig, so bilden A und $A' = G \setminus A$ eine Zerlegung von G , denn es gilt: (i) $A \cap A' = \emptyset$ und (ii) $A \cup A' = G$.

Nun zu dem angekündigten Satz über die Mächtigkeit einer Menge im Zusammenhang mit einer Zerlegung:

Satz 5:

Sei G eine Grundmenge und $A \subseteq G$ eine beliebige Teilmenge von G . Weiterhin bilde B_1, B_2, \dots, B_r eine Zerlegung von G . Dann gilt für die Mächtigkeit von A :

$$n(A) = n(A \cap B_1) + n(A \cap B_2) + \dots + n(A \cap B_r) .$$

Bemerkung:

Ist G eine Grundmenge und sind A, B zwei beliebige Teilmengen von G ($B \neq \emptyset$, $B \neq G$), so folgt mit Satz 5 und mit der Bemerkung (1) im Anschluss an Definition 10:

$$n(A) = n(A \cap B) + n(A \cap B') .$$

Allerdings lässt sich diese Gleichung auch schon aus Satz 4 (ii) herleiten unter Verwendung der Mengengleichung: $A \cap B' = A \setminus (A \cap B)$.

Die vorgehenden Sätze lassen sich nun anwenden, wenn man aus gegebenen Daten (z.B. im Rahmen einer vorgegebenen statistischen Verteilung) zusätzliche Informationen gewinnen will. An der folgenden Aufgabe soll dies beispielhaft dargelegt werden:

Beispielaufgabe:

In dem Kurs „*Analysis I (lehramtsbezogen)*“ haben sämtliche Teilnehmer an einer Semesterabschlussklausur teilgenommen. Dabei haben nach Auswertung der Klausur 156 Teilnehmer/innen nicht bestanden, darunter 105 männliche Studenten. Insgesamt 158 männliche Teilnehmer brachten die Klausur erfolgreich hinter sich. Außerdem befanden sich 207 weibliche Studentinnen in dem Kurs. Man beantworte folgende Fragen:

- a) Wieviele Teilnehmer hatte der Kurs insgesamt?
 b) Wieviele weibliche Teilnehmerinnen haben die Klausur bestanden?

Lösung:

Zunächst führen wir entsprechende Mengenbezeichnungen ein:

- G : Grundmenge der Kursteilnehmer an der „*Analysis I (lehramtsbezogen)*“,
 F : Menge der weiblichen Studenten im Kurs,
 M : Menge der männlichen Kursteilnehmer,
 B : Menge der erfolgreichen Absolventen/innen der Abschlussklausur,
 N : Menge der Studenten/innen, die die Klausur nicht bestanden.

Aufgrund dieser Mengendefinitionen bestehen folgende Beziehungen zwischen den Mengen:

- (i) $M = F'$ wegen $F \cap M = \emptyset$, $F \cup M = G$ und
 (ii) $N = B'$ wegen $B \cap N = \emptyset$, $B \cup N = G$.

Gegeben sind folgende Zahlen (Mächtigkeiten):

$$\boxed{n(M) = n(B') = 156}, \quad \boxed{n(M \cap N) = n(F' \cap B') = 105}, \quad \boxed{n(M \cap B) = n(F' \cap B) = 158}$$

sowie $\boxed{n(F) = 207}$.

Gesucht sind in (a) und (b) die Mächtigkeiten $\boxed{n(G) = ?}$ und $\boxed{n(F \cap B) = ?}$

Wir wollen zuerst $n(M) = n(F')$ berechnen.

Da B und $N = B'$ eine Zerlegung von G bilden, kann Satz 5 angewendet werden:

$$n(M) = n(M \cap B) + n(M \cap B') = 158 + 105 = 263.$$

Nun bilden auch F und $M = F'$ eine Zerlegung von G , so dass mit Bemerkung 2 zu Satz 4 folgt:

$$n(G) = n(F) + n(M) = 207 + 263 = 470.$$

Schließlich gilt aufgrund von Satz 5, da F und F' sowie B und B' eine Zerlegung von G bilden, und aufgrund der Kommutativität von „ \cap “:

$$n(F) = n(F \cap B) + n(F \cap B') \quad \text{und} \quad n(B') = n(B' \cap F) + n(B' \cap F') = n(F \cap B') + n(F' \cap B').$$

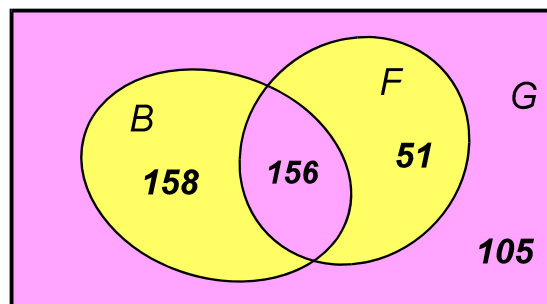
Damit erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} n(F \cap B) &= n(F) - n(F \cap B') = n(F) - \{ n(B') - n(F' \cap B') \} = n(F) - n(B') + n(F' \cap B') \\ &\Rightarrow n(F \cap B) = 207 - 156 + 105 = 156. \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich somit insgesamt:

$$\boxed{n(G) = 470 \quad \text{und} \quad n(F \cap B) = 156}.$$

Die Zahlen lassen sich insgesamt noch einmal an einer Skizze verdeutlichen, wobei die entsprechenden Mächtigkeiten in dem jeweiligen entsprechend berandeten Mengenfeld eingetragen werden:



Bleibt zu bemerken, dass die Mächtigkeit für die Menge $F \cap B'$ sich aus folgender Berechnung ergibt, wenn man Satz 5 anwendet (B und B' zerlegen ja die Grundmenge G):

$$n(F) = n(F \cap B) + n(F \cap B') \quad \Rightarrow \quad n(F \cap B') = n(F) - n(F \cap B) = 207 - 156 = 51.$$

Bemerkung:

Die Mächtigkeiten können im Fall der vier Teilmengen F, F', B und B' auch in Form des folgenden Mengendiagramms visualisiert werden:

| | | |
|---------------------------|----------------------------|---|
| $F \cap B$ 156 | $F \cap B'$ 51 | G |
| $F' \cap B$ 158 | $F' \cap B'$ 105 | |

Kap. 2.5: Verallgemeinerte Schnitte und Vereinigungen von Mengen

Auf der Grundlage der Prädikatenlogik mit ihrem All- und Existenzquantor lassen sich nun auch Vereinigungen und Schnitte über beliebige Familien von Mengen definieren.

Definition 11:

Sei $\mathcal{F} = \{M_\alpha \mid \alpha \in I\}$ eine beliebige Familie bzw. ein beliebiges System von Mengen M_α mit zugehöriger Indexmenge I . Wir definieren dann als Schnitt über alle Mengen M aus der Familie \mathcal{F} :

$$(i) \quad \boxed{\bigcap_{M \in \mathcal{F}} M = \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha := \{x \mid \forall \alpha \in I : x \in M_\alpha\} = \{x \mid \forall M \in \mathcal{F} : x \in M\}}$$

Analog definieren wir als Vereinigung über alle Mengen M aus der Familie \mathcal{F} :

$$(ii) \quad \boxed{\bigcup_{M \in \mathcal{F}} M = \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha := \{x \mid \exists \alpha \in I : x \in M_\alpha\} = \{x \mid \exists M \in \mathcal{F} : x \in M\}}$$

Bemerkung:

Im Spezialfall der Indexmenge $I = \mathbf{N}$ der natürlichen Zahlen schreibt man auch:

$$\boxed{\bigcap_{\alpha \in \mathbf{N}} M_\alpha = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\bigcup_{\alpha \in \mathbf{N}} M_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i}$$

für den Schnitt bzw. die Vereinigung über alle Mengen des Mengensystems $\mathcal{F} = \{M_i \mid i \in \mathbf{N}\}$. Beispiele dazu werden wir in der Analysis noch kennenlernen.
