Technische Universität Berlin
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

StRiH. A. Gündel-vom Hofe

WS 2013/14
03.12.2013

Ergänzungsskript zur „Analysis I (lehramtsbezogen)“

Anordnungsaxiome der reellen Zahlen

Im Kapitel 3 des Skripts zu Relationen und Abbildungen haben wir die *Anordnung* axiomatisch über die Eigenschaften *Areflexivität* (*AR*), *Asymmetrie* (*AS*) sowie *Transitivität* (*TRA*) eingeführt. Hinzu kam die Besonderheit der *Konnexität* (*KO*) oder *totalen Ordnung*. Im Fall des Bereichs (*Körpers*) $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen kann man auch, wie folgt vorgehen, um die Relationen „<“, „>“, „≤“ und „≥“ einzuführen.

In der Menge (dem Körper) $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen ist die Teilmenge $P \subseteq \boldsymbol{R}$ der *positiven Zahlen* – das sind die Zahlen $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$ mit positivem bzw. ohne Vorzeichen – besonders ausgezeichnet und definiert, und man führt als *Schreibweise* ein: $\boxed{x > 0 \quad :\Leftrightarrow \quad x \in P}$.

Bezüglich dieser Menge P bzw. der Relation *„> 0“* gelten dann die folgenden Axiome:

Anordnungsaxiome in IR	
Trichotomie:	Für alle $x \in \boldsymbol{R}$ gilt: $x > 0$ oder $(-x) > 0$ oder $x = 0$ oder: $\forall x \in \boldsymbol{R}: \ x \in P \ \vee \ (-x) \in P \ \vee \ x = 0$.
Abgeschlossenheit der Addition:	Für alle $x,y \in \boldsymbol{R}$ gilt: $x > 0$ und $y > 0 \Rightarrow x + y > 0$ oder: $\forall x,y \in \boldsymbol{R}: \ x \in P \ \wedge \ y \in P \ \Rightarrow \ x + y \in P$.
Abgeschlossenheit der Multiplikation:	Für alle $x,y \in \boldsymbol{R}$ gilt: $x > 0$ und $y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$ oder: $\forall x,y \in \boldsymbol{R}: \ x \in P \ \wedge \ y \in P \ \Rightarrow \ x \cdot y \in P$.

Definiert man nun für $x,y \in \boldsymbol{R}$:

$\boxed{x > y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y > 0}$ und $\boxed{x < y \quad :\Leftrightarrow \quad y > x}$,

so erhält man folgende *Rechengesetze* für den Umgang mit Ungleichungen:

Rechengesetze für Ungleichungen	
Archimedisches Axiom:	$x > 0$, $y > 0 \Rightarrow n \cdot x > y$ für ein $n \in \boldsymbol{N}$
Transitivität von „<“	$x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$
Addition einer beliebigen reellen Zahl:	$x < y \Rightarrow x + z < y + z$ für $z \in \boldsymbol{R}$ beliebig

Multiplikation mit einer positiven Zahl:	$x < y$ und $z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$
Multiplikation mit einer negativen Zahl:	$x < y$ und $z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$
Positivheit von Quadraten:	Für $x \neq 0$ beliebig gilt: $x^2 > 0$
Positivheit der multiplikativ inversen Elemente:	$x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$
„Invertierung" von Ungleichungen:	$0 < x < y \Rightarrow y^{-1} < x^{-1} > 0$

Definiert man noch für $x,y \in \boldsymbol{R}$: $\boxed{x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad x < y \text{ oder } x = y}$ und $\boxed{x \geq y \quad :\Leftrightarrow \quad y \leq x}$, so folgen die meisten der soeben formulierten Rechengesetze für Ungleichungen auch für „≤" und „≥" . Insbesondere gilt für beliebige Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{R}$:

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0}$$

Mithilfe von Ungleichungen lassen sich in $\boldsymbol{R}$ spezielle Teilmengen reeller Zahlen einführen:

Intervalle in IR	
abgeschlossenes Intervall:	Sei $a,b \in \boldsymbol{R}$ mit $a \leq b$. Dann gilt: $[a\,,b] := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $[a\,,\infty[\;=\; [a\,,\infty) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leq x\}$ $]-\infty\,,b] = (-\infty\,,b] := \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \leq b\}$
offenes Intervall (*alternative Schreibweise*):	$]a\,,b[\;=\; (a\,,b) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}$ $]a\,,\infty[\;=\; (a\,,\infty) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x\}$ $]-\infty\,,b[\;=\; (-\infty\,,b) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < b\}$ Speziell erhält man noch: $\boldsymbol{R} = \;]-\infty\,,\infty[\;=\; (-\infty\,,\infty)$
halboffenes bzw. halbabgeschlossenes Intervall:	$[a\,,b[\;=\; [a\,,b) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leq x < b\}$ $]a\,,b] = (a\,,b] := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \leq b\}$

Bemerkungen:

- Insbesondere lassen sich die *Lösungsmengen* $\boldsymbol{L}$ reeller Ungleichungen in Form einer Vereinigung, eines Durchschnitts oder einer Mengendifferenz von Intervallen darstellen. (Zu den *Mengenoperaptionen* siehe etwas weiter unten.)
- Intervalle oder Vereinigungen von Intervallen bilden häufig den *Definitionsbereich* von *reellen Funktionen* $f : D_f \to \boldsymbol{R}$. Dabei versteht man unter einer reellen Funktion eine Abbildungsvorschrift, die jeder reellen Zahl x aus einer vorgegebenen Menge $D_f \subseteq \boldsymbol{R}$ -

dem sogenannten *Definitionsbereich* der Funktion - eine eindeutige Zahl $y = f(x)$ aus der Menge $W_f = \boldsymbol{R}$ - dem sogenannten *Wertebereich* der Funktion - zuordnet.

Der Absolutbetrag von reellen Zahlen

<u>*Definition:*</u>
Für eine reelle Zahl $x \in \boldsymbol{R}$ führen wir den *Absolutbetrag* $|x|$ ein mittels:

$$\boxed{|x| := \begin{cases} x \;, \text{ falls } \; x \geq 0 \\ -x \;, \text{ falls } \; x < 0 \end{cases}}$$

Mit dem Absolutbetrag $|x|$ erhalten wir eine *Norm* in $\boldsymbol{R}$, d.h. es gelten folgende *Gesetze*:

	Gesetze des Absolutbetrages
positive Definitheit:	Für alle $x \in \boldsymbol{R}$ gilt: $\lvert x \rvert \geq 0$, wobei $\lvert x \rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Homogenität:	$\lvert x \cdot y \rvert = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$
Dreiecksungleichung	$\lvert x + y \rvert \leq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$

<u>*Satz 1:*</u>
Aus den Gesetzen für den Absolutbetrag lassen sich folgende weitere *Eigenschaften* für den Betrag reeller Zahlen $x,y \in \boldsymbol{R}$ herleiten:

(i) $\boxed{-|x| \leq x \leq |x|}$, (ii) $\boxed{|-x| = |x|}$, (iii) $\boxed{\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}}$ für $y \neq 0$,

(iv) $\boxed{|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y \Leftrightarrow (\, x \geq -y \;\; und \;\; x \leq y \,)}$ für $y \geq 0$,

(v) $\boxed{|x| \geq y \Leftrightarrow (\, x \geq y \;\; oder \;\; -x \geq y \,) \Leftrightarrow (\, x \geq y \;\; oder \;\; x \leq -y \,)}$ für $y \geq 0$,

(vi) $\boxed{|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|}$ (*„umgekehrte" Dreiecksungleichung)*.

<u>*Bemerkungen:*</u>

- Eigenschaft (iv) kommt im Rahmen des Lösens von Ungleichungen häufig in folgender Weise zur Anwendung, wenn $a,x \in \boldsymbol{R}$ und $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \boldsymbol{R}$) beliebig gegeben sind:

$$\boxed{|x - a| \leq \varepsilon \;\; \Leftrightarrow \;\; a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon \;\; \Leftrightarrow \;\; a - \varepsilon \leq x \;\; und \;\; x \leq a + \varepsilon}\,.$$

- Erinnert man sich an die *Quadratwurzel* $\boxed{\sqrt{a}}$ für $a \in \boldsymbol{R}$, $a \geq 0$ als *eindeutig bestimmte, nicht-negative Lösung* der Gleichung $\boxed{x^2 = a}$, so hängen Betrag und Quadratwurzel der reellen Zahl $x \in \boldsymbol{R}$, $x \geq 0$ zusammen, wie folgt: $\boxed{|x| = \sqrt{x^2}}$.

Daraus erhält man insbesondere folgende Ungleichung: $\boxed{|x| \le |y| \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \le y^2}$.

Tipps im Umgang mit Ungleichungen

Hat man Ungleichungen zu lösen, in denen *rationale Ausdrücke* von linearen oder quadratischen Termen oder die Beträge solcher Terme auftreten, dann helfen folgende Tricks:

1. Bei *Produkt*- oder *Quotiententermen* der Form
   $(ax+b)\cdot(cx+d) \ge 0$ oder ≤ 0 bzw. $\dfrac{ax+b}{cx+d} \ge 0$ oder ≤ 0
   beachte man die *Vorzeichenregeln*: $(+)\cdot(+) = (-)\cdot(-) = +$ sowie $(+)\cdot(-) = (-)\cdot(+) = -$.
2. Entsprechend zerlege man die reelle Zahlengerade in *Teilintervalle* J_i , in denen jeweils die einzelnen linearen Terme *konstantes Vorzeichen* haben, und ermittle in diesen Teilintervallen jeweils die *Teillösungsmengen* $\boldsymbol{L}_i$. Beachte, dass gelten muss: $\boldsymbol{L}_i \subseteq J_i$.
3. Zum Lösen einer *algebraischen Ungleichung* der Form $a_m \cdot x^m + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \ge 0$ bzw. ≤ 0 oder allgemeiner $\dfrac{a_m \cdot x^m + \ldots + a_1 \cdot x + a_0}{b_n \cdot x^n + \ldots + b_1 \cdot x + b_0} \ge 0$ bzw. ≤ 0 zerlege man den (die) algebraischen Term(e) in ein *Produkt von Linearfaktoren* und beachte dann Tipp 1. Insbesondere stellen die Nullstellen der algebraischen Terme, durch welche die Zahlengerade in Teilintervalle zerlegt wird, die *„kritischen Punkte"* der Ungleichung dar.
4. Lösungsmengen von Ungleichungen mit *zwei* Unbekannten stellen Teilmengen der Ebene $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ dar. *Systeme* von zwei oder mehreren Ungleichungen in zwei Unbekannten sind entsprechend *Schnittmengen* solcher Einzellösungsmengen.
5. Bei Ungleichungen mit *Beträgen* von linearen, quadratischen oder allgemeiner algebraischen Termen löse man den Betrag durch Zerlegung von $\boldsymbol{R}$ in die Teilintervalle auf, in welchen der Term innerhalb der Betragsstriche konstantes Vorzeichen hat. Wiederum sind die Nullstellen des innerhalb des Betrages stehenden algebraischen Termes *kritische Punkte* der Ungleichung.
6. Die Zerlegung von $\boldsymbol{R}$ durch die kritischen Punkte einer Ungleichung in Teilintervalle zur Lösung der Ungleichung ordne man vorteilhafterweise in Form einer *Tabelle* an, in welcher für die einzelnen Teilintervalle das jeweilige *Vorzeichen der Einzelterme* eingetragen wird. Man benutze für die berechneten *Teillösungsmengen* die *Intervallschreibweise*.