# Kap 3: Abbildungen und Relationen

## Kap. 3.1: Relationen zwischen Mengen bzw. in einer Menge

*Definition 1:*

Seien $A$ und $B$ zwei nichtleere Mengen. Jede beliebige Teilmenge $R \subseteq A \times B$ des Cartesischen Produkts von $A$ und $B$ nennt man eine *Relation zwischen* $A$ *und* $B$. Im Fall $A = B = M$ nennt man $R \subseteq M^2 = M \times M$ auch eine *Relation in* $M$.

*Bemerkungen:*

1. Man beachte, dass aufgrund dieser Definition die *leere Menge* $\emptyset \subseteq A \times B$ sowie das *Cartesische Produkt* $A \times B$ selbst Relationen darstellen.
2. Man kann den Begriff der Abbildung $f$ zwischen zwei Mengen $A$ und $B$ als Spezialfall einer Relation zwischen den Mengen $A$ und $B$ verstehen mit einer die Abbildung charakterisierenden Eigenschaft (siehe weiter unten).
3. Für ein beliebiges Paar $(a.b) \in M \times M$ führt man im Zusammenhang mit einer gegebenen Relation $R$ in einer Menge $M \neq \emptyset$ auch folgende Schreibweise ein, welche wir ab jetzt häufig benutzen werden:

   $\boxed{a \sim_R b} :\Leftrightarrow (a,b) \in R$ .

Unter den allgemeinen Relationen *in* einer Menge $M \neq \emptyset$ spielen zwei Typen über die verschiedenen Bereiche der Mathematik hinweg eine besondere Rolle. Dies sind zum einen die *Äquivalenzrelationen* und zum anderen die *Anordnungsrelationen* bzw. – damit eng verbunden – die *strengen Anordnungsrelationen*. Beide Typen fußen auf speziellen sie charakterisierenden *Eigenschaften* von Relationen, die wir nun im Folgenden auflisten:

*Definition 2:*

Sei $R \subseteq M \times M$ eine Relation. Gilt:

(*RE*) $\forall a \in M : \boxed{a \sim_R a}$ , heißt $R$ *reflexiv*.

(*AR*) $\forall a \in M : \boxed{\neg(a \sim_R a)}$ , heißt $R$ *areflexiv*.

(*SY*) $\forall a,b \in M : \boxed{a \sim_R b \;\Rightarrow\; b \sim_R a}$ , heißt $R$ *symmetrisch*.

(*AS*) $\forall a,b \in M : \boxed{a \sim_R b \;\Rightarrow\; \neg(b \sim_R a)}$ , heißt $R$ *asymmetrisch*.

(*TRA*) $\forall a,b,c \in M : \boxed{a \sim_R b \wedge b \sim_R c \;\Rightarrow\; a \sim_R c}$ , heißt $R$ *transitiv*.

(*ID*) $\forall a,b,c \in M : \boxed{a \sim_R b \wedge b \sim_R a \;\Rightarrow\; a = b}$ , heißt $R$ *antisymmetrisch* oder *identitiv*.

*Bemerkung:*

Man beachte, dass (*AR*) nicht automatisch das Gegenteil – also die Verneinung – von (*RE*) und (*AS*) nicht automatisch das Gegenteil von (*SY*) ist. Man zeige dies unter Zuhilfenahme der Logik. Insbesondere kann eine Relation weder die Eigenschaft (*RE*) noch die Eigenschaft (*AR*) besitzen. Analoges gilt für (*SY*) und (*AS*).

Wir beschreiben nun die genannten Relationentypen mithilfe der soeben aufgeführten Eigenschaften.

<u>*Definition 3:*</u>
Eine Relation $R \subseteq M \times M$ in $M$ heißt
a) *Äquivalenzrelation*, falls für $R$ die Eigenschaften (*RE*), (*SY*) und (*TRA*) gelten,
b) (*An-*)*Ordnungsrelation*, falls für $R$ die Eigenschaften (*RE*), (*ID*) und (*TRA*) gelten und
c) (*strenge*) *Ordnungsrelation*, falls die Eigenschaften (*AR*), (*AS*) und (*TRA*) gelten.
Gilt im Fall einer Ordnungsrelation $R$ zusätzlich die Eigenschaft
(*KO*) $\forall a,b \in M: \boxed{a \sim_R b \ \vee\ b \sim_R a \ \vee\ a = b}$ , so heißt $R$ *linear*, *konnex* oder auch *total* geordnet.

<u>*Bemerkung:*</u>
Im Fall einer *konnex* geordneten Menge sind also zwei verschiedene Elemente $a,b \in M$ bezüglich der Relation $R$ immer vergleichbar.

Im Zusammenhang mit einer Äquivalenzrelation $R$ in einer Menge $M$ führt man noch den wichtigen Begriff der *Äquivalenzklasse* ein.

<u>*Definition 4:*</u>
Ist $R = \sim_R$ eine Äquivalenzrelation in einer Menge $M \neq \emptyset$ , so nennt man für jedes $a \in M$ die Menge $\boxed{[a]_{\sim_R} := \{x \in M \mid x \sim_R a\}}$ die *Äquivalenzklasse* zu $a$ bezüglich $\sim_R$ und jedes $b \in [a]_{\sim_R}$ einen *Repräsentanten* dieser Äquivalenzklasse.

Es folgt ein wichtiger Satz über die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation:

<u>*Satz 1:*</u>
Ist $R = \sim_R$ eine Äquivalenzrelation in einer Menge $M \neq \emptyset$ , so gilt für die Äquivalenzklassen bezüglich $R$ stets:

$$\boxed{\forall a,b \in M: \ [a]_{\sim_R} \cap [b]_{\sim_R} = \emptyset \ \vee\ [a]_{\sim_R} = [b]_{\sim_R}} \ .$$

<u>*Beweis:*</u>
Übungsaufgabe.

<u>*Folgerung:*</u>
Insbesondere bilden also die Äquivalenzklassen zu einer Äquivalenzrelation eine *Zerlegung* der Menge $M$ (siehe dazu *Definition 10* aus Kap. 2).

Wir wollen uns zum Abschluss dieses Abschnitts mit der Frage beschäftigen, wie in einer Menge $M$ mit gegebener Relation $R \subseteq M \times M$ und einer zusätzlich gegebenen inneren Verknüpfung – das kann im Fall eines Zahlbereichs $M$ zum Beispiel die *Addition* oder die *Multiplikation* von Elementen aus $M$ sein – sich die Relation $R$ und die innere Verknüpfung in $M$ vertragen. Dazu definieren wir zunächst, was wir unter einer inneren Verknüpfung in einer Menge $M$ verstehen.

*Definition 5:*

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und „$*$“ $\subseteq A \times M$ eine Relation zwischen dem Cartesischen Produkt $A = M \times M$ und der Menge $M$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem Paar $(a,b) \in M \times M$ ein eindeutiges $c \in M$ existiert, so dass $((a,b), c) \in$ „$*$“ gilt, so nennt man „$*$“ eine *innere Verknüpfung* in $M$ und schreibt kurz: $\boxed{a * b := *(a,b) = c}$ .

*Bemerkung:*

Eine andere Interpretation für die innere Verknüpfung besteht in der Form einer *Abbildung* von der Menge $A = M \times M$ in die Menge $B = M$ (siehe dazu Kap. 3.2).

*Definition 6:*

Ist in einer Menge $M \neq \emptyset$ eine innere Verknüpfung „$*$“ sowie eine Relation $R = \sim_R$ in $M$ gegeben, so heißt $R$ *mit* „$*$“ *verträglich*, falls gilt:

$(V)$ $\forall a,b,c,d \in M$ : $\boxed{a \sim_R b \wedge c \sim_R d \;\Rightarrow\; (a * c) \sim_R (b * d)}$ .

*Bemerkung:*

Die Verträglichkeit einer Relation mit einer gegebenen inneren Verknüpfung ist vor allem im Fall von Äquivalenz- und Ordnungsrelationen von immanent wichtiger Bedeutung.

## Kap. 3.2: Abbildungen (Funktion), Bild und Urbild

Der Begriff der *Abbildung* ist wie auch der Begriff der *Menge* von fundamentaler Bedeutung für die Mathematik. Er beschreibt die Möglichkeit der eindeutigen *Zuordnung* von Elementen einer Menge zu einer anderen. Er lässt sich aus dem Begriff der *Relation* heraus definieren:

*Definition 7:*

Seien $A$ und $B$ zwei Mengen. Unter einer *Abbildung von* $A$ *in* $B$ (oder: *nach* $B$ ) versteht man eine Relation $R \subseteq A \times B$ zwischen $A$ und $B$ , bei welcher zu *jedem* $a \in A$ *genau ein* $b \in B$ existiert, so dass $(a,b) \in R$ ist. Auf diese Weise beschreibt $R$ eine *Zuordnungsvorschrift*, durch welche *jedem* $a \in A$ ein *eindeutiges* $b \in B$ zugeordnet wird.

*Bezeichnungen:*

Anstelle von $R$ schreibt man im Fall einer Abbildung genauer $\boxed{f : A \to B}$ . Dabei nennt man $A$ den *Definitions-* oder *Urbildbereich von* $f$ (in Zeichen: $\boxed{D_f = A}$ ) und $B$ den *Werte-* oder *Bildbereich von* $f$ (in Zeichen: $\boxed{W_f = B}$ ). Das durch die Abbildung $f$ einem Element $x \in A$ eindeutig zugeordnete Element $y \in B$ nennt man das *Bild von* $a$ und schreibt: $\boxed{y = f(x)}$ . Das Element $x \in A$ selbst bezeichnet man auch als (ein) *Urbild von* $y$ unter $f$ .

<u>*Bemerkungen:*</u>

1. Anstelle des Begriffes *Abbildung* verwendet man in bestimmten Bereichen der Mathematik auch synonym die Begriffe *Funktion*, *Operator* u.ä. Insbesondere spricht man im Falle einer Abbildung zwischen *Zahlenmengen* häufig von einer *Funktion* $y = f(x)$ und nennt $y$ den *Funktionswert von* $f$ *an der Stelle* $x$ und $x$ auch das *Argument von* $f$.
2. Man kann für eine Abbildung $f$ zwischen zwei Mengen $A$ und $B$ zuweilen die folgende geschlossene symbolische Schreibweise vorfinden:

$$\boxed{\begin{array}{l} f : A \to B \\ x \mapsto y := f(x) \end{array}}$$

3. Die Definition einer Abbildung von $A$ in $B$ beinhaltet eigentlich zwei Bedingungen, nämlich dass:
   a) *zu jedem Urbildelement* $x \in A$ *mindestens ein Bildelement* $y \in B$ unter $f$ gefunden werden kann und
   b) das *Bildelement* $y = f(x)$ gleichzeitig *eindeutig* gegeben ist.

   Andererseits ist von einer Abbildung *weder* gefordert, dass *alle Elemente im Bildbereich als Bilder* auftauchen, *noch* dass die *Bilder* unbedingt *verschieden* sein müssen.

Wir wollen noch definieren, wann wir zwei Abbildungen als *gleich* oder *identisch* ansehen:

<u>*Definition 8:*</u>

Zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ heißen *gleich*, wenn $A = C$ und $B = D$ gilt und außerdem: $\boxed{\forall x \in A :\ f(x) = g(x)}$ .

<u>*Bemerkung:*</u>

Zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : A \to B$ sind also nach den Regeln der Prädikatenlogik *nicht gleich*, wenn gilt: $\boxed{\neg(\forall x \in A : f(x) = g(x)) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in A : f(x) \neq g(x))}$ , d.h. wenn sich die Bilder $f(x)$ und $g(x)$ in mindestens einem $x \in A$ unterscheiden.

<u>*Beispiele:*</u>

1. Sei $A$ die Menge der Studenten/innen an der FU Berlin und $B$ die Menge aller in Deutschland gültigen Kfz-Kennzeichen. Ordnet man jeder/jedem Studierenden $x \in A$ das Kennzeichen $y \in B$ des ihr/ihm gehörenden PWKs zu, so liegt <u>*keine*</u> Abbildung vor, denn:
   a) einerseits gibt es FU-Studenten, die *kein* Auto besitzen, so dass nicht jedem $a \in A$ ein $b \in B$ zugeordnet werden kann, und
   b) andererseits kann es FU-Studenten geben – sofern sie es sich finanziell leisten können –, die 2 Autos besitzen, so dass in diesen Fällen die Zuordnung von $y \in B$ zu $x \in A$ *nicht eindeutig* gegeben ist.
2. Wählen wir jetzt $A$ als die Menge aller gültigen Kfz-Kennzeichen in Deutschland (*nicht* rote Nummern) und $B$ als die Menge aller Kfz-Halter, so wird eine Abbildung $f : A \to B$ definiert, wenn man jedem Kennzeichen $x \in A$ den zugehörigen Kfz-Halter $y = f(x) \in B$ als Bild zuordnet.
3. Ist $M$ die Menge aller Menschen, $A$ die Menge aller Frauen und $B$ die Menge aller Männer, so sind durch

$f : M \to M$ mit $y := f(x)$ als der *leiblichen* Mutter von $x \in M$ und
$g : M \to M$ mit $y := g(x)$ als dem *leiblichen* Vater von $x \in M$

zwei Abbildungen von $M$ in $M$ gegeben, da jeder Mensch $x \in M$ eine eindeutig gegebene leibliche Mutter und einen eindeutig gegebenen leiblichen Vater hat[*)]. Betrachtet man noch

$h : M \to A \times B$ mit $h(x) = (a,b)$ als dem *leiblichen* Elternpaar von $x \in M$,

so ist durch $h$ eine Abbildung von $M$ in $A \times B$ gegeben. Man beachte hierbei, dass die Elemente im Wertebereich jetzt *geordnete Paare* darstellen. Insbesondere besteht also das Bild(element) von $x$ unter $h$ aus 2 Komponenten, nämlich der leiblichen Mutter $a \in A$ und dem leiblichen Vater $b \in B$ .

Zwischen $h$ einerseits und $f$ und $g$ andererseits ist schließlich der folgende Zusammenhang gegeben:

$$\forall x \in M : \ h(x) = (f(x), g(x)) \ .$$

4. Ist $A = B = \boldsymbol{R}$ die Menge der reellen Zahlen, so beschreibt $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ mit $y = f(x) = x^2$ die Funktion, die jeder reellen Zahl $x$ ihr Quadrat $x^2$ als Wert zuordnet.
5. Im folgenden Beispiel sind der Definitionsbereich $A$ und der Wertebereich $B$ als endliche Mengen gegeben. Die Abbildung $f$ wird durch die konkrete Angabe der Bilder der einzelnen Elemente $a \in A$ beschrieben:

   $A = \{\mathrm{a, b, c}\}$ , $B = \{\nu, \lambda, \upsilon, \sigma\}$ und $f : A \to B$ mit $f(\mathrm{a}) = \lambda$ , $f(\mathrm{b}) = \sigma$ , $f(\mathrm{c}) = \lambda$ .

   Wie man sieht, werden die Elemente $\nu, \upsilon \in B$ im Wertebereich durch $f$ nicht erreicht. Andererseits sind die Bilder von a und c unter $f$ gleich, denn es gilt: $f(\mathrm{a}) = f(\mathrm{c}) = \lambda$ .
6. Betrachte die Abbildung $f : \boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{N_0} \to \boldsymbol{N_0}$ mit $f(m,n) := 2^m \cdot 3^n$ , $(m,n) \in \boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{N_0}$ . Dies ist ein Beispiel einer Abbildung von *zwei Variablen*, welche jedem geordneten Paar $(m,n)$ aus dem Definitionsbereich $\boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{N_0}$ eine Zahl im Wertebereich $\boldsymbol{N_0}$ eindeutig zuordnet, so z.B. $f(1,0) = 2^1 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 2$ , $f(0,1) = 2^0 \cdot 3^1 = 1 \cdot 3 = 3$ , $f(2,2) = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$ usw.

Wir kommen nun zu den Begriffen *„Bild"* und *„Urbild"* im Zusammenhang mit Abbildungen:

*Definition 9:*

Seien $A$ und $B$ zwei Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung von $A$ in $B$ (oder: nach $B$ ).

a) Ist $M \subseteq A$ eine Teilmenge von $A$ , so heißt die Menge $\boxed{f(M) := \{f(x) \mid x \in M\}}$ das *Bild von $M$ unter $f$* . Speziell gilt also: $f(M) \subseteq B$ .

b) Ist $N \subseteq B$ eine Teilmenge von $B$ , so heißt die Menge $\boxed{f^{-1}(N) := \{x \in A \mid f(x) \in N\}}$ das *Urbild von $N$ unter $f$* . Speziell gilt also: $f^{-1}(N) \subseteq A$ .

*Bemerkungen:*

1. Man beachte, dass es sich bei $f(M)$ für $M \subseteq A$ und $f^{-1}(N)$ für $N \subseteq B$ jeweils um Mengen handelt. Sucht man speziell das Urbild eines Elements $y \in B$ unter $f$ , so schreibt man: $\boxed{f^{-1}(\{y\}) := \{x \in A \mid f(x) = y\}}$ und meint damit das Urbild der *Elementar- oder*

[*)] Wir wollen voraussetzen: $x$ ist *nicht geklont* !!

*Einermenge* $\{y\} \subseteq B$ *. Man vergesse also nicht die Mengenklammern innerhalb der runden Funktionsklammern !!!* Allerdings lässt man häufig der leichteren Schreibbarkeit wegen diese Mengenklammern auch weg.

2. Stets gilt $\boxed{f^{-1}(B) = A}$ , während $\boxed{f(A) = B}$ *nicht* unbedingt gelten muss. Außerdem: Existieren für eine Teilmenge $N \subseteq B$ *keine* Elemente $x \in A$ mit $f(x) \in N$ , so gilt: $\boxed{f^{-1}(N) = \{a \in A \mid f(x) \in N\} = \varnothing}$. Speziell folgt also: $\boxed{\forall y \in N : f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}) = \varnothing}$ .
3. Man beachte: $\boxed{\forall y_1, y_2 \in B : y_1 \neq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \varnothing}$ .

   Denn wenn die rechte Schnittmenge *nicht* leer ist, dann existiert ein $x \in A$ mit $x \in f^{-1}(b_1)$ und $x \in f^{-1}(b_2)$ , also mit $f(x) = b_1$ und $f(x) = b_2$ . Dann folgt aber $b_1 = b_2$ , da das Bild $f(x)$ unter der Abbildung $f : A \to B$ eindeutig definiert ist. Somit haben wir die Kontraposition der obigen Aussage bewiesen.

*Beispiele:*

1. Sei $f : A \to B$ die Abbildung von oben, welche jedem Kfz-Kennzeichen $x \in A$ den eindeutigen Kfz-Halter $y = f(x) \in B$ zuordnet, $M = \{$B-AC 3396, H-VX 321$\} \subseteq A$ sowie $N \subseteq B$ die Menge der Hörer aus der Vorlesung *„Analysis I (lehramtsbezogen)“*. Dann ist durch $f(M) \subseteq B$ die Menge der Kfz-Halter der Fahrzeuge mit den Kennzeichen „B-AC 3396“ und „H-VX 321“ und $f^{-1}(N) \subseteq A$ dagegen die Menge sämtlicher Kfz-Kennzeichen von Fahrzeugen, die auf die Hörer der Vorlesung *„Analysis I* (*lehramtsbezogen*)*“* zugelassen sind.
2. Bezeichnet $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ mit $y = f(x) = x^2$ die Quadratfunktion, so gilt z.B.: $f(\boldsymbol{R}) = \{ f(x) = x^2 \mid x \in \boldsymbol{R} \} = \{ y \in \boldsymbol{R} \mid y \geq 0 \}$ , $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$ und $f^{-1}(\{+1\}) = \{-1, +1\}$ .
3. Für die Abbildung $f : A \to B$ mit $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\nu, \lambda, \upsilon, \sigma\}$, die durch $f(a) = \lambda$ , $f(b) = \sigma$ und $f(c) = \lambda$ gegeben ist, erhält man z.B.: $f(A) = \{\lambda, \sigma\}$ , $f(\{a, c\}) = \{\lambda\}$ , $f^{-1}(\{\lambda\}) = \{a, c\}$ , $f^{-1}(\{\sigma\}) = \{b\}$ , $f^{-1}(\{\nu, \upsilon\}) = \varnothing$ .
4. Sei $f : \boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{N_0} \to \boldsymbol{N_0}$ die Abbildung mit $f(m,n) := 2^m \cdot 3^n$ ( $(m,n) \in \boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{N_0}$), so gilt z.B. für das Bild $f(A)$ der Menge $A = \{(m,0) \mid m \in \boldsymbol{N_0}\} \subseteq \boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{N_0}$ :
   $f(A) = \{f(m,0) \mid m \in \boldsymbol{N_0}\} = \{2^m \cdot 3^0 \mid m \in \boldsymbol{N_0}\} = \{2^m \mid m \in \boldsymbol{N_0}\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$

Wir kommen nun zur *Darstellung einer Abbildung* $f : A \to B$ zwischen den beiden Mengen $A$ und $B$ . Hierfür gibt es (insbesondere im Fall endlicher Mengen $A$, $B$ ) im Wesentlichen drei verschiedene Möglichkeiten:

a) die Darstellung durch eine *Wertetabelle*,
b) die Darstellung mittels eines *Pfeildiagramms* und
c) die Darstellung durch den *Funktionsgraphen*.

Die Darstellung mittels *Wertetabelle* (a) und *Pfeildiagramm* (b) ist im wesentlichen nur sinnvoll, wenn der Definitionsbereich $D_f = A$ der Abbildung eine *endliche* Menge ist, während Funktionsgraphen (c) zur Darstellung der Abbildung $f$ sowohl im Falle *endlicher* als auch *unendlicher* Definitionsbereiche $D_f = A$ geeignet sind.

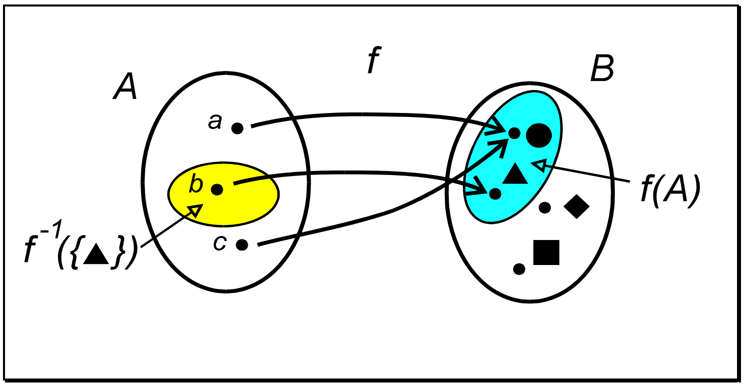
Stellt man bei einer *Wertetabelle* den Elementen $x \in A$ die Bildelemente $y = f(x) \in B$ gegenüber, so verwendet man zur graphischen Beschreibung einer Abbildung $f : A \to B$ mittels eines *Pfeildiagramms* für den Definitions- und den Wertebereich jeweils Ovale und kennzeichnet die Zuordnung eines Elements $y = f(x) \in B$ zu einem Element $x \in A$ durch einen Pfeil, der in $x$ beginnt und in $y$ endet. Die Gesamtheit aller Pfeile veranschaulicht dann die Abbildung $f$ im Ganzen.

*Beispiel:*

Für das Beispiel 5 auf S.37 erhält man als *Wertetabelle* und *Pfeildiagramm*:

| $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{y = f(x)}$ |
|---|---|
| $a$ | $\lambda$ |
| $b$ | $\sigma$ |
| $c$ | $\lambda$ |

a) *Wertetabelle* zu $y = f(x)$




b) *Pfeildiagramm* zu $y = f(x)$

*Beachten Sie:*

*Von jedem Element in* $A$ geht *genau ein Pfeil in Richtung* $B$ ab, aber *in* $B$ *bleiben* bei der Abbildung $f$ einerseits *Elemente unerreicht* (wie in diesem Fall $\upsilon \in B$ und $\nu \in B$), andererseits enden *in einem Element* auch *mehrere Pfeile* (wie hier bei $\lambda \in B$).

Im Diagramm sind zusätzlich die Mengen $f(A) \subseteq B$ und $f^{-1}(\{\sigma\}) \subseteq A$ kenntlich gemacht.

Für die *dritte Darstellungsmöglichkeit* einer Abbildung definieren wir:

*Definition 10:*

Ist $f : A \to B$ eine Abbildung von $A$ in $B$ (bzw. nach $B$), so heißt die Menge

$$\boxed{\Gamma_f := \{(x,y) \mid x \in A, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}} \subseteq A \times B \quad \text{der } \textit{Graph} \text{ von } f.$$

Insbesondere ist der Graph einer Abbildung also eine Teilmenge des Cartesischen Produktes $A \times B$.

*Bemerkung:*

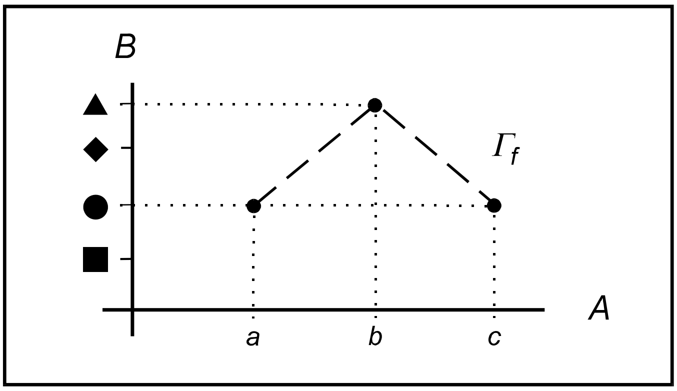
Als Teilmenge von $A \times B$ wird der *Graph* einer Abbildung unter Verwendung eines Cartesischen Koordinatensystems „visualisiert“, wobei die Elemente des Definitionsbereiches auf der waagerechten Koordinatenachse oder *Abszisse* und die Elemente des Wertebereiches auf der senkrechten Koordinatenachse oder *Ordinate* platziert werden.

*Beispiele:*

a) Die obige Abbildung $f : A \to B$ mit $f(a) = f(c) = \lambda$, $f(b) = \sigma$ hat den Funktionsgraphen

$$\Gamma_f = \{(x, f(x) \mid x \in A\} = \{(a, \lambda), (b, \sigma), (c, \lambda)\}$$

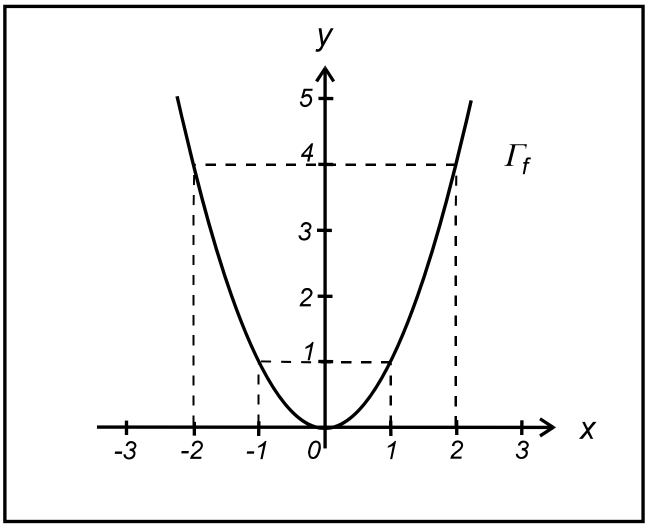
mit der folgenden Veranschaulichung (*Man beachte, dass die gestrichelten Verbindungslinien zwischen den einzelnen Punkten von $\Gamma_f$ eigentlich <u>nicht</u> zum Graphen gehören*):




*Graph von $f : A \to B$*

b) Die Abbildung $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $y = f(x) = x^2$ (Quadratfunktion) besitzt den Graph

$$\Gamma_f = \{ (x, y) \mid y = x^2, x \in \mathbf{R} \} = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbf{R} \}$$




*Graph von $y = f(x) = x^2$*

<u>*Bemerkung:*</u>

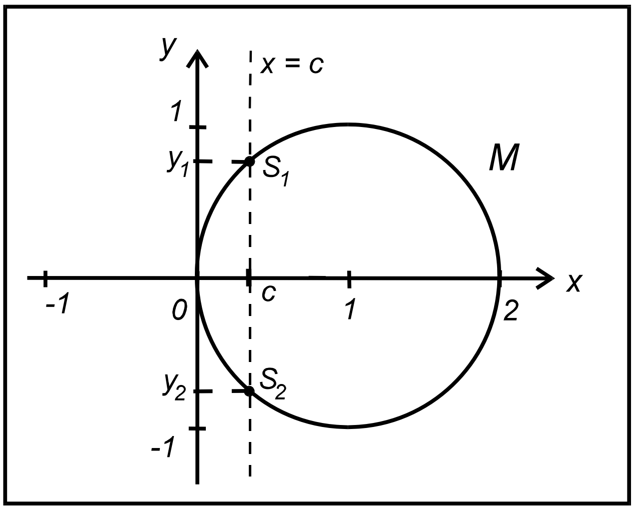
Für den Graph einer Abbildung von $A \subseteq \mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$ gilt folgende *charakteristische Eigenschaft*:

| |
|---|
| Eine Teilmenge $M \subseteq A \times B \subseteq \mathbf{R}^2$ ist genau dann Graph einer Abbildung $f : A \to B$, wenn im Cartesischen Koordinatensystem durch jeden Punkt $a \in A$ die Parallele zur $y$-Achse die Punktmenge $M$ in genau einem Punkt $S(a,b)$ trifft. Es gilt dann: $b = f(a)$ . |

<u>*Beispiel:*</u>

Die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 ,\ 0 \le x \le 2 \}$ beschreibt den Rand eines Kreises um den Mittelpunkt $P(1,0)$ mit dem Radius $r = 1$ . Offensichtlich ist $M$ *nicht* der Graph einer Funktion $f : A \to \mathbf{R}$ mit Definitionsbereich $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 2\}$, da die Senkrechten $x = c$ durch jedes $c \in A \setminus \{0,2\}$ die Menge $M$ jeweils in genau zwei Punkten $S_1$ und $S_2$ schneiden:

*Skizze dazu:*



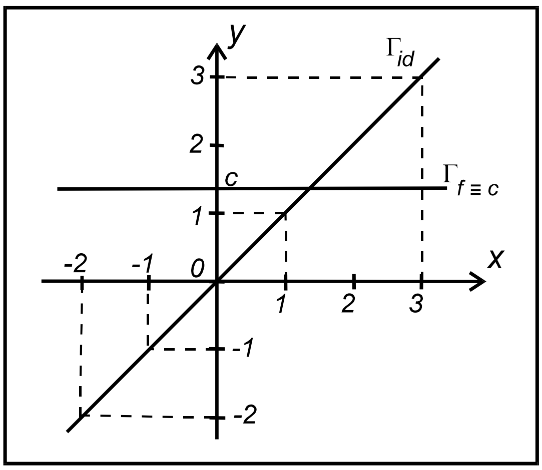

Es folgen noch zwei wichtige Beispiele von Funktionen und ihren Graphen:

*Definition 11:*

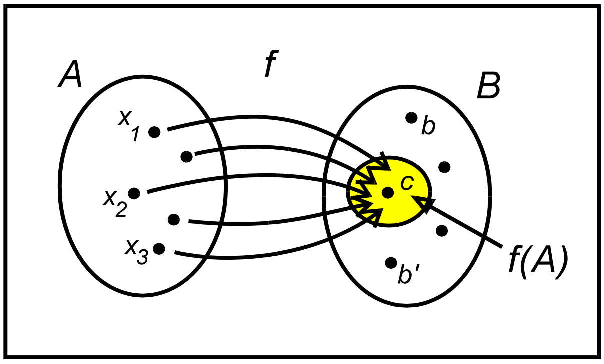
(1) $f : A \to B$ heißt *konstante Abbildung* (*Funktion*), wenn ein $c \in B$ existiert, so dass gilt: $\boxed{\forall x \in A:\ f(x) = c}$ bzw. $\boxed{f(A) = \{c\}}$. Eine andere Schreibweise ist: $\boxed{f \equiv c,\ c \in B}$.
Für den Graphen $\Gamma_f$ gilt dann: $\Gamma_f = \{(x, c) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$.

(2) Die Abbildung $id_A : A \to A$ mit $\boxed{\forall x \in A:\ id_A(x) = x}$ heißt *identische Abbildung* oder *identische Funktion*. Für den Graphen gilt: $\Gamma_{id} = \{(x, x) \mid x \in A\} \subseteq A \times A$.

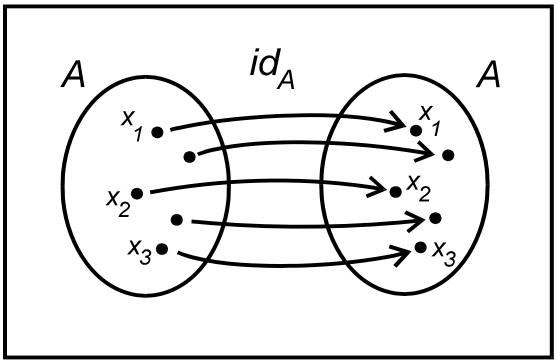
Veranschaulichung der beiden *Funktionsgraphen* $\Gamma_{id}$ und $\Gamma_{f \equiv c}$ im Falle $A = B = \mathbf{R}$:



Veranschaulichung durch *Pfeildiagramm*:




*Graph von* $f \equiv c$




*Graph von* $id_A$

<u>*Definition 12:*</u>

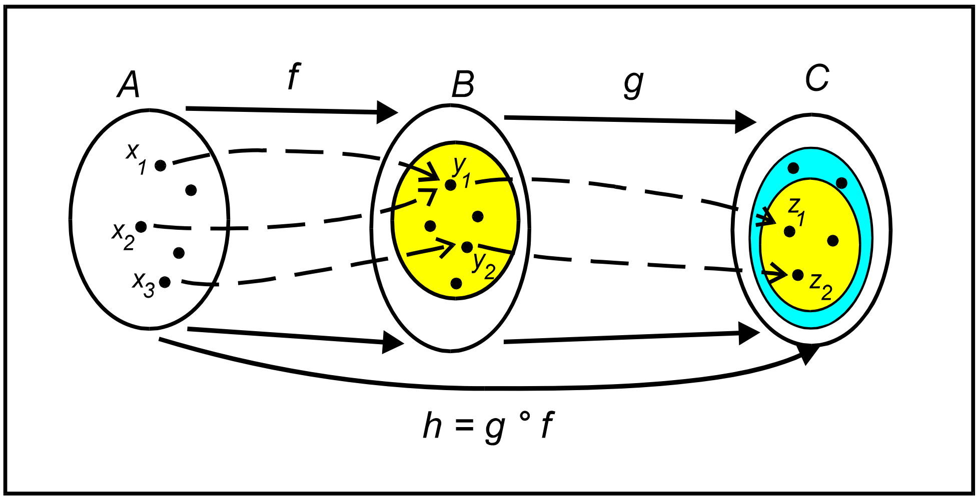
Seien zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gegeben. Dann wird durch

$$\boxed{g \circ f : A \to C \text{ mit } (g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (x \in A)}$$

eine Abbildung von $A$ nach $C$ definiert, die man die *Komposition* oder *Hintereinanderschaltung* oder *Zusammensetzung* von $f$ und $g$ nennt. Sie entsteht durch das „Ineinander einsetzen" der beiden Abbildungsvorschriften zu $f$ und $g$. Man sagt für $g \circ f$: „$g$ *nach* $f$."

Die Hintereinanderschaltung $h = g \circ f$ zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ kann durch folgendes *Pfeildiagramm* „visualisiert" werden:

<u>*Skizze*</u>:




Gemäß Pfeildiagramm erhält man im vorliegenden Fall speziell:

$h(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = z_1$, $h(x_2) = (g \circ f)(x_2) = g(f(x_2)) = g(y_1) = z_1$ sowie $h(x_3) = (g \circ f)(x_3) = g(f(x_3)) = g(y_2) = z_2$.

Man beachte außerdem, dass bei der Komposition von Abbildungen entgegen der „Leserichtung“ stets die *rechts* stehende Abbildung zuerst ausgeführt und dann erst die *links* stehende Abbildung dahinter geschaltet wird. *Oder anders ausgedrückt*:

Die in dem Ausdruck $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ „dichter“ beim Argument $x \in A$ stehende (rechte) Abbildung $f$ „bindet“ das $x$ stärker als die etwas weiter davon entfernt stehende (linke) Abbildung $g$.

Dabei kann selbst im Fall von $A = B = C$ die Reihenfolge der hintereinander auszuführenden beiden Abbildungen $f$ und $g$ nicht ohne weiteres vertauscht werden, d.h. es gilt im allgemeinen: $g \circ f \neq f \circ g$. Oder anders: *Die Verknüpfung von Abbildungen ist i.a. nicht kommutativ.*

Als Beispiel betrachte man hierzu $A = B = C = \boldsymbol{R}$, $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ mit $y = f(x) = x^2$ $(x \in \boldsymbol{R})$ sowie $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ mit $y = g(x) = x + 1$ $(x \in \boldsymbol{R})$. Dann folgt für die beiden Kompositionen $g \circ f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ und $f \circ g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = x^2 + 1$ $(x \in \boldsymbol{R})$ und $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ $(x \in \boldsymbol{R})$. Es folgt somit offensichtlich: $g \circ f \neq f \circ g$.

## Kap. 3.3: Einige Eigenschaften von Abbildungen

Im Folgenden sollen die wichtigsten Eigenschaften allgemeiner Abbildungen bzw. Funktionen untersucht werden, nämlich *Injektivität*, *Surjektivität* und *Bijektivität*. Im Zusammenhang mit der letztgenannten Eigenschaft wird auch die *Umkehrabbildung* oder *Umkehrfunktion* (manchmal auch *inverse Abbildung* genannt) behandelt.

<u>*Definition 13:*</u>

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

(1) *injektiv* oder *eineindeutig*, falls gilt: $\boxed{\forall x, x' \in A : \; x \neq x' \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(x')}$

(d.h. verschiedene Urbilder führen zu verschiedenen Bildern),

(2) *surjektiv* oder *Abbildung <u>auf</u>* $B$, falls gilt: $\boxed{f(A) = B}$, d.h. $\boxed{\forall y \in B \; \exists x \in A : \; y = f(x)}$,

(3) *bijektiv*, falls $f$ injektiv *und* surjektiv ist.

<u>*Bemerkungen:*</u>

1. Die für die *Injektivität* angegebene Bedingung wird häufig auch in Form ihrer Kontraposition zum Nachweis dieser Eigenschaft benutzt ($p \to q \;=\; \neg q \to \neg p$):

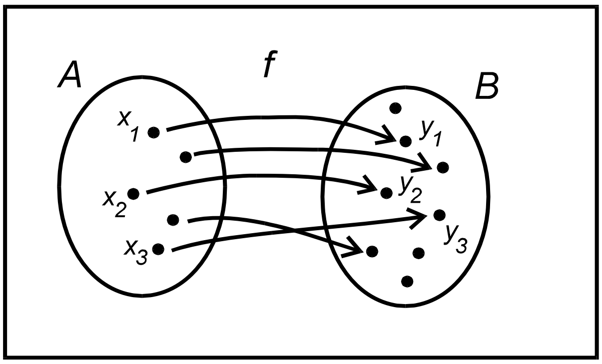
$$\boxed{\forall x, x' \in A : \; f(x) = f(x') \;\Rightarrow\; x = x'}$$

   (d.h. gleiche Bilder führen zu gleichen Urbildern).

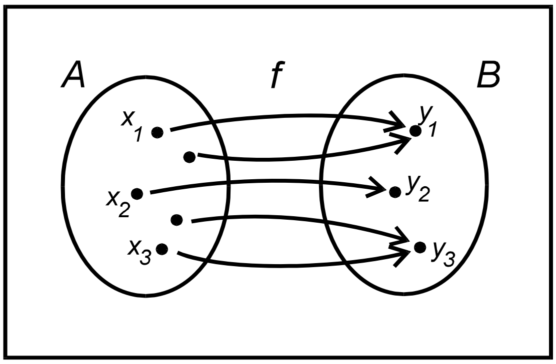
2. Eine andere Formulierung für *Surjektivität* lautet: $\boxed{\forall y \in B : \; f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset}$

   (d.h. sämtliche Urbilder zu $y \in B$ sind nicht leer.)

Im *Pfeildiagramm* zeigt sich die *Injektivität* einer Abbildung darin, dass *in jedem* $y \in B$ *höchstens* ein Pfeil enden darf, während im Fall der *Surjektivität in jedem* $y \in B$ *mindestens* ein Pfeil ankommen muss:




*f injektiv, aber nicht surjektiv*




*f surjektiv, aber nicht injektiv*

Insbesondere kann man folgenden Satz daraus für Abbildungen zwischen *endlichen* Mengen herleiten:

<u>*Satz 2:*</u>

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung zwischen zwei *endlichen* Mengen $A$ und $B$ mit $n(A) = n$ und $n(B) = m$ . Dann gilt:

a) Ist $f$ *injektiv*, so folgt: $n \le m$ .
b) Ist $f$ *surjektiv*, so folgt: $m \le n$ .
c) Ist $f$ *bijektiv*, so folgt: $n = m$ .

<u>*Beweis:*</u>

a) Da $f$ injektiv ist, gilt für alle $x,x' \in A$ : $x \ne x' \;\Rightarrow\; f(x) \ne f(x')$ ; d.h. die Anzahl der Bilder unter der Abbildung $f$ ist mit der Anzahl der Elemente im Definitionsbereich $D_f = A$ identisch. Also folgt: $n(f(A)) = n(A) = n$ . Außerdem erhält man wegen $f(A) \subseteq B$ die Ungleichung: $n = n(f(A)) \le n(B) = m$ .

b) Aus der Surjektivität von $f$ folgt: $f(A) = B$ , d.h.: $n(f(A)) = n(B) = m$ . Andererseits folgt aus der Abbildungseigenschaft von $f$ : $n(f(A)) \le n(A) = n$ , da i.a. mehrere Elemente in $A$ auf dasselbe Bildelement $y \in B$ abgebildet werden können. Somit erhält man: $m \le n$ .

c) Da $f$ genau dann bijektiv ist, wenn $f$ injektiv <u>und</u> surjektiv ist, folgt die Behauptung $m = n$ aus den Aussagen in den Teilen (a) und (b) des Satzes.

<u>*Beispiele:*</u>

1. Die Abbildung, die jeder FU-Studentin / jedem FU-Studenten seine Matrikelnummer zuordnet, ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv, denn einerseits haben verschiedene FU-Studenten/innen auch verschiedene Matrikelnummern, aber andererseits „deckt" die Menge der Studenten/innen an der FU nicht sämtliche FU-Matrikelnummern ab.

2. Die Abbildung $f : A \to B$ mit $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\nu, \lambda, \upsilon, \sigma\}$, die durch $f(a) = \lambda$ , $f(b) = \sigma$ und $f(c) = \lambda$ gegeben ist, ist *weder injektiv* (wegen $f(a) = f(c) = \lambda$ ) *noch surjektiv* (wegen $f^{-1}(\{\nu\}) = \varnothing$ ).

3. Ist $f : \boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{N_0} \to \boldsymbol{N_0}$ die Abbildung mit $f(m,n) := 2^m \cdot 3^n$ $(m,n \in \boldsymbol{N_0})$, so ist $f$ *injektiv*, aber *nicht surjektiv*, denn z.B. gilt für das Element $5 \in \boldsymbol{N_0}$ : $5 \notin f(\boldsymbol{N_0} \times \boldsymbol{N_0})$ , da ansonsten aus $5$

$= f(m,n) = 2^m \cdot 3^n$ folgen würde, dass $2$ oder $3$ Teiler von $5$ wären. Andererseits gilt aber für $a = (m,n)$, $b = (k,l) \in \mathbf{N_0} \times \mathbf{N_0}$ beliebig:

$$f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; f(m,n) = f(k,l) \;\Rightarrow\; 2^m \cdot 3^n = 2^k \cdot 3^l \;\Rightarrow\; 2^{m-k} = 3^{l-n}\ .$$

Einzige Lösung der letzten Gleichung ist aber aufgrund der Teilerfremdheit zwischen verschiedenen *2*er- und *3*er-Potenzen: $2^{m-k} = 3^{l-n} = 1$ . Hieraus folgt:

$$m - k = l - n = 0 \;\Rightarrow\; (m = k) \wedge (l = n) \;\Rightarrow\; a = (m,n) = (k,l) = b\ .$$

Damit ist aber die Injektivität nachgewiesen.

4. Die konstante Abbildung $f \equiv c$ ist genau dann *surjektiv*, wenn gilt: $B = \{c\}$ . Sie ist *injektiv* genau dann, wenn gilt: $\mathrm{n}(A) = 1$ , d.h. $A = \{a\}$ . Demgegenüber ist die identische Abbildung $id_A$ stets *bijektiv*.

Dass die Eigenschaften *Surjektivität* und *Injektivität* von der Wahl des Definitions- und des Wertebereichs einer Abbildung abhängen, zeigt das folgende Beispiel der *quadratischen Funktion*:

*Beispiel:*

Die Abbildung $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $y = f(x) = x^2$ (Quadratfunktion) ist *weder injektiv noch surjektiv*, denn zunächst gilt:

$\forall x \in \mathbf{R} :\ f(x) = x^2 \geq 0$ . Also: $f(\mathbf{R}) = \{y \in \mathbf{R} \mid y \geq 0\} \neq \mathbf{R}$ . Somit werden unter der Quadratfunktion $y = x^2$ nicht alle reellen Zahlen $y \in \mathbf{R}$ als Bilder erreicht (*keine Surjektivität*).

Andererseits gilt: $\forall x, x' \in \mathbf{R} :\ f(x) = f(x') \;\Rightarrow\; x^2 = x'^2 \;\Rightarrow\; x^2 - x'^2 = (x + x') \cdot (x - x') = 0$
$\Rightarrow\; (x + x' = 0) \vee (x - x') = 0 \;\Rightarrow\; (x = x') \vee (x = -x')$ , also Gleichheit der Urbilder nur bis auf Vorzeichen. Daraus folgt aber: $f$ ist *nicht injektiv*.

Wählt man aber nun einerseits $W_f = \mathbf{R_0^+} := \{y \in \mathbf{R} \mid y \geq 0\}$ , so wird $f$ zunächst *surjektiv*.
Wählt man andererseits zudem $D_f = \mathbf{R_0^+} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ , so wird $f$ zusätzlich auch *injektiv*.
Damit ist schließlich $f : \mathbf{R_0^+} \to \mathbf{R_0^+}$ mit $y = f(x) = x^2$ eine *bijektive* Abbildung, wobei zu jedem $y \in \mathbf{R_0^+}$ das eindeutige Urbild $x \in \mathbf{R_0^+}$ unter $f$ gerade durch $x = \sqrt{y}$ gegeben ist. (Die „Wurzelfunktion“ $x = \sqrt{y}$ wird auch als *Umkehrfunktion* der Quadratfunktion bezeichnet.)

Die Visualisierung der Eigenschaften Injektivität und Surjektivität einer Abbildung im Zusammenhang mit *Pfeildiagrammen* (s.S.37) führt uns nun bei genauerer Betrachtung zum Begriff der *Umkehrfunktion*.

*Bemerkung:*

Ist $f : A \to B$ eine allgemeine Abbildung, so folgt aus der Definition von Injektivität und Surjektivität:

a) $f$ ist *injektiv* genau dann, wenn zu jedem $y \in B$ *höchstens* ein Urbild $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$ ;
b) $f$ ist *surjektiv* genau dann, wenn zu jedem $y \in B$ *mindestens* ein Urbild $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$ .

Aus (a) und (b) folgt dann:

c) $f$ ist *bijektiv* genau dann, wenn zu jedem $y \in B$ *genau ein* Urbild $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$ . Damit wird aber (s. *Definition 12*) genau eine Abbildung von $B$ nach (in) $A$ beschrieben.

Bemerkung (c) gibt uns nun Anlass, zu einer *bijektiven* Abbildung die sogenannte *Umkehrabbildung* oder *Umkehrfunktion* zu definieren:

<u>*Definition 14:*</u>

Sei $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung. Dann wird durch $f^{-1} : B \to A$ mit

$$\boxed{y = f^{-1}(x) \quad :\Leftrightarrow \quad x = f(y)}$$

eine Abbildung von $B$ nach (in) $A$ definiert. Man nennt die Abbildung $f^{-1}$ die *Umkehrabbildung* oder *Umkehrfunktion von* $f$ .

<u>*Bemerkungen:*</u>

1. Zur Definition einer Umkehrabbildung $f^{-1}$ reicht es aus, dass die zugrunde liegende Abbildung $f$ *injektiv* ist. Dann ist diese Abbildung automatisch *bijektiv*, wenn man als Wertebereich $B := f(A)$ wählt. Somit hat man dann: $f^{-1} : f(A) \to A$ mit $f(A)$ als *Definitionsbereich für* $f^{-1}$.
2. Man beachte, dass bei Benutzung einer Umkehrabbildung $f^{-1}$ die geschweiften Mengenklammern zwischen den runden Klammern fehlen, da es sich hier wirklich um eine Abbildung handelt, bei der $f^{-1}(x)$ das *Bildelement* von $x$ unter $f^{-1}$ beschreibt. Also <u>*Merkregel:*</u>

| |
|---|
| *Ist $y \in B$ und $f$ eine Abbildung, so existiert $f^{-1}(\{y\})$ als Urbildmenge* (innen geschweifte Klammern) *immer, während $f^{-1}(y)$* (innen <u>keine</u> geschweiften Klammern) *als Element und Bild von $y$ unter der Umkehrabbildung $f^{-1}$ nur dann existiert, wenn $f$ bijektiv ist.* |

Wir kommen jetzt zur „geometrischen" Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den Graphen $\Gamma_f$ und $\Gamma_{f^{-1}}$ einer bijektiven Abbildung $f$ und ihrer Umkehrabbildung $f^{-1}$ :

<u>*Satz 3:*</u>

Seien $A, B \subseteq \mathbf{R}$ , $f : A \to B$ eine *bijektive* Abbildung. Dann gilt für den Graphen $\Gamma_{f^{-1}}$ der *Umkehrabbildung* $f^{-1} : B \to A$ von $f$ :

$$\boxed{\Gamma_{f^{-1}} = \left\{ (x,y) \in B \times A \,\middle|\, (y,x) \in \Gamma_f \right\}} \,.$$

D.h. der Graph $\Gamma_{f^{-1}}$ der Umkehrabbildung $f^{-1}$ entsteht aus dem Graphen $\Gamma_f$ von $f$ durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ .

(Die Punkte $P(x,y)$ und $Q(y,x)$ werden nämlich durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ ineinander überführt.)

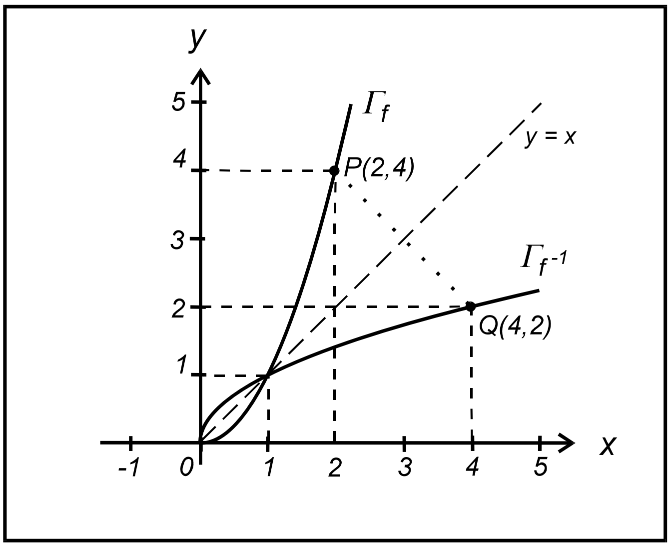
<u>*Beweis*</u>:

Für jedes beliebige Paar $(x,y) \in B \times A$ gilt:

$$(x,y) \in \Gamma_{f^{-1}} \subseteq B\times A \;\Leftrightarrow\; y = f^{-1}(x) \;\Leftrightarrow\; x = f(y) \;\Leftrightarrow\; (y,x) \in \Gamma_f \subseteq A\times B \;.$$

q.e.d.

*Beispiel:*




*Graph von* $y = f(x) = x^2$ *und* $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ *im Fall* $A = B = [0, +\infty[$

Der folgende Satz stellt einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Umkehrfunktion $f^{-1}$ einer bijektiven Abbildung $f$ und der Identitätsfunktion $id$ her:

*Satz 4:*

Ist $f : A \to B$ eine *bijektive* Abbildung und $f^{-1} : B \to A$ ihre Umkehrfunktion, so gilt:

$$\boxed{f^{-1} \circ f = id_A} \quad \text{und} \quad \boxed{f \circ f^{-1} = id_B}$$

*Beweis*:

Setzt man in der definierenden Gleichung $y = f^{-1}(x)$ die rechte Seite der Definitionsgleichung $x = f(y)$ ein, so erhält man für jedes beliebige $y \in B$ : $y = f^{-1}(f(y)) = (f^{-1} \circ f)(y))$ . Andererseits gilt für alle $y \in B$ : $y = id_B(y)$ . Also folgt daraus mit der Gleichheit von Abbildungen: $f^{-1} \circ f = id_B$ .

Analog gilt für alle $x \in A$ mit $y = f^{-1}(x)$ : $x = f(y) = f(f^{-1}(x)) = (f \circ f^{-1})(x)$ und andererseits für alle $x \in A$ : $x = id_A(x)$ . Diesmal folgt mit der Gleichheit von Abbildungen: $f \circ f^{-1} = id_A$ .

q.e.d.

Abschließen wollen wir den Abschnitt über Abbildungen mit einer Aufgabe zum Nachweis der Injektivität einer gegebenen Abbildung und der Herleitung der Abbildungsvorschrift ihrer Umkehrabbildung. Der Test soll durch Anwendung des Satzes 4 erfolgen:

<u>Aufgabe</u>:

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \boldsymbol{R}\setminus\{-3\} \to \boldsymbol{R}$ mit $y = f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$ $(x \in \boldsymbol{R}\setminus\{-3\})$ injektiv ist und leiten Sie die Abbildungsvorschrift für die Umkehrfunktion $f^{-1}$ von $f$ her.

<u>Lösung</u>:

a) *z.z.: f ist injektiv*

Wir benutzen zum Nachweis der Injektivität das Kriterium in der Form der Bemerkung 1 auf S. 37 oben. Dann gilt zunächst für zwei beliebige $x, x' \in D_f = \boldsymbol{R}\setminus\{-3\}$ :

$$f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{x+3} = \frac{x'-2}{x'+3} \quad \underset{\cdot(x+3)\cdot(x'+3)}{\Rightarrow} \quad (x-2)\cdot(x'+3) = (x'-2)\cdot(x+3) \quad \Rightarrow$$

$$x\cdot x' - 2x' + 3x - 6 = x'\cdot x - 2x + 3x' - 6 \quad \underset{-x\cdot x'+6}{\Rightarrow} \quad -2x' + 3x = -2x + 3x' \quad \underset{+2x+2x'}{\Rightarrow}$$

$$5x = 5x' \quad \underset{:5}{\Rightarrow} \quad x = x'$$

Somit ist aber gezeigt: $\boxed{\forall x, x' \in A:\ f(x) = f(x') \ \Rightarrow\ x = x'}$. Also ist $f$ *injektiv*.

b) *Herleitung der Abbildungsvorschrift und des Definitionsbereichs für* $f^{-1}$

Aus dem allgemeinen Ansatz $\boxed{y = f^{-1}(x) \ \Leftrightarrow\ x = f(y)}$ erhält man im vorliegenden Fall die *Abbildungsvorschrift*, wie folgt :

$$y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y) = \frac{y-2}{y+3} \quad \underset{\cdot(y+3)}{\Leftrightarrow} \quad x\cdot(y+3) = y-2 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot y + 3x = y-2$$

$$\underset{-y-3x}{\Leftrightarrow} \quad x\cdot y - y = -3x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad y\cdot(x-1) = -(3x+2) \quad \underset{:(x-1)}{\Leftrightarrow} \quad \boxed{y = f^{-1}(x) = -\frac{3x+2}{x-1}}$$

Für den *Definitionsbereich* von $f^{-1}$ gilt: $y = f^{-1}(x)$ ist definiert für $x - 1 \neq 0$ , d.h. $x \neq 1$ .
Also gilt: $\boxed{D_{f^{-1}} = \boldsymbol{R}\setminus\{1\}}$

c) *Probe der hergeleiteten Abbildungsvorschrift*

Nach Satz 4 muss gelten: $\boxed{f^{-1}\circ f = id_{R\setminus\{-3\}}}$ und $\boxed{f\circ f^{-1} = id_{R\setminus\{1\}}}$. Zum Nachweis der korrekten Herleitung der Vorschrift für die Umkehrabbildung $f^{-1}$ reicht eine der beiden Gleichungen, so z.B. die linke. Für alle $x \in \boldsymbol{R}\setminus\{-3\}$ gilt dann:

$$(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = -\frac{3\cdot f(x)+2}{f(x)-1} = -\frac{3\cdot\frac{x-2}{x+3}+2}{\frac{x-2}{x+3}-1} = -\frac{x+3}{x+3}\cdot\frac{3\cdot(x-2)+2\cdot(x+3)}{(x-2)-(x+3)}$$

$$= -\frac{3x-6+2x+6}{x-2-x-3} = -\frac{5x}{-5} = x = id_{R\setminus\{-3\}}(x)\ . \quad \text{Also folgt: } \boxed{f^{-1}\circ f = id_{R\setminus\{-3\}}}\ .$$

Die Gültigkeit der anderen Gleichung würde man analog nachweisen. Auf jeden Fall erkennt man, dass die in (b) hergeleitete Abbildungsvorschrift für $f^{-1}$ korrekt ist.

****************************************************