FU Berlin: WiSe 13-14 (Analysis 1 - Lehr.)
Übungsaufgaben – Zettel 9

Aufgabe 37

Indizieren Sie die folgenden Summen und Produkte gemäß der Vorgabe um und schreiben Sie sie einmal *explizit* aus:

(a) $\sum_{n=0}^{5}(n+1)^2 = \sum_{k=} k^2$

Lösung. Die linkere Summe läuft für n von 0 bis 5, und die Summanden sind $(n+1)^2$. Da die Summe auf die rechte Seite aus Summanden k^2 besteht, muss es

$$k = n + 1$$

sein. Also, läuft k von 1 (wenn $n = 0$) bis 6 (wenn $n = 5$):

$$\sum_{n=0}^{5}(n+1)^2 = \sum_{k=1}^{6} k^2$$

(b) $\sum_{n=0}^{3}(2n+5)^2 = \sum_{k=}(2k-1)$

Lösung. Es muss gelten:

$$2n + 5 = 2k - 1$$

also ist $k = n + 3$.
Und da $n = 0, \ldots, 3$ ist, folgt

$$\sum_{n=0}^{3}(2n+5)^2 = \sum_{k=3}^{6}(2k-1)\,.$$

(c) $\sum_{n=2}^{6} \frac{-1^{n-1}}{(n+3)^2} = \sum_{k=} \frac{-1^?}{k^2}$

Lösung. Wir vergleichen zuerst die beide Nenner. Es folgt:

$$k = n + 3\,,$$

und k läuft von $k = 5$ (wenn $n = 2$) bis 9 (wenn $n = 6$). Dann folgt auch:

$$(-1)^{n-1} = (-1)^{n+3} \cdot \underbrace{(-1)^{-4}}_{=1} = (-1)^{n+3} = (-1)^k$$

also:

$$\sum_{n=2}^{6} \frac{-1^{n-1}}{(n+3)^2} = \sum_{k=5}^{11} \frac{-1^{k}}{k^2}$$

(Achtung: Da $(-1)^m = 1$, für $m \in \mathbf{N}$ gerade, gibt es für diese Aufgabe unendliche viele Lösungen!)

(d) $\Pi_{n=2}^{5} \frac{n-1}{n+2} = \Pi_{k=} \frac{k-?}{k}$

Lösung. Aus

$$\frac{n-1}{n+2} = \frac{k-?}{k}$$

folgt:

$$k = n+2 \text{ (Nenner) und } n-1 = k-3 \text{ Zähler}$$

Dann:

$$\Pi_{n=2}^{5} \frac{n-1}{n+2} = \Pi_{k=4}^{7} \frac{k-3}{k}$$

e) $\Pi_{n=3}^{4} \frac{n+1}{n^2-4} = \Pi_{k=} \frac{k-1}{?}$

Lösung. Wir vergleichen zu erst die Zähler, dann folgt:

$$n+1 = k-1 \Rightarrow k = n+2$$

Dann gilt:

$$n^2 - 4 = (n+2)(n-2) = k(k-4)$$

und d.h.

$$\Pi_{n=3}^{4} \frac{n+1}{n^2-4} = \Pi_{k=5}^{6} \frac{k-1}{k(k-4)}$$

f) $\Pi_{n=5}^{7} \frac{n^2-9}{n-2} = \Pi_{k=} \frac{?}{k+1}$

Lösung. Analog wie in Punkt (e), haben wir

$$n-2 = k+1 \Rightarrow k = n-3$$

(zuerts die Nenner vergleichen) und

$$n^2 - 9 = (n+3)(n-3) = (k+6)k$$

Dann:

$$\Pi_{n=5}^{7} \frac{n^2-9}{n-2} = \Pi_{k=2}^{4} \frac{k(k+6)}{k+1}$$

Aufgabe 38

Unter Verwendung des Prinzips der vollständigen Induktion beweise man, daß für sämtliche natürliche Zahlen $n \in \mathbf{N}_0$ und alle reellen Zahlen $q \in \mathbf{R}$, $q \neq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} \tag{1}$$

Lösung.
Wir müssen zeigen dass

- (i) die Gleichung (1) gilt für $n = 1$, und für alle $q \in \mathbf{R}$, $q \neq 1$
- (ii) wenn (1) für ein gegebene n und für alle $q \in \mathbf{R}$, $q \neq 1$ gilt, dann gilt es auch für $n + 1$ und für alle $q \in \mathbf{R}$, $q \neq 1$
- (iii) die Gleichung (1) gilt für $n = 0$, und für alle $q \in \mathbf{R}$, $q \neq 1$

Mit der Sprache der Logik, definireren wir die Aussage:

$$A(n) := \left(\forall q \in \mathbf{R},\, q \neq 1 : \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} \right)$$

und zu beweisen sind:

- (i) (Induktionsanfang) $A(1)$
- (ii) (Induktionsschritt) $\underbrace{A(n)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} \Rightarrow A(n+1)$
- auch dass $A(0)$ (weil es für alle $n \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ gelten muss)

Beweis.
Der Beweis für $n = 0$ ist einfach:

$$\sum_{k=1}^{0} kq^{k-1} = 0, \text{ (es gibt keine Summe, weil } k \text{ von 1 bis 0 laufen muss!) und}$$

$$\frac{1-(0+1)q^0 + 0q^{0+1}}{(1-q)^2} = \frac{1-1+0}{(1-q)^2} = 0\,.$$

(i) Wenn $n = 1$ gelten

$$\sum_{k=1}^{1} kq^{k-1} = 1 \cdot q^0 = 1$$

und

$$\frac{1-(1+1)q^1 + 1q^{1+1}}{(1-q)^2} = \frac{1-2q+q^2}{(1-q)^2} = 1\,.$$

Also gilt (1) ($A(1)$ ist wahr).
(ii) Jetzt nehmen wir an, dass $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$. Um die Induktion anzuwenden, müssen wir dann beweisen dass:

$$\forall q \in \mathbf{R},\ q \neq 1 : \sum_{k=1}^{n+1} kq^{k-1} = \frac{1-(n+2)q^{n+1}+(n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2}$$

Zu erst berechnen wir die linke Seite für $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} kq^{k-1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}}_{\text{die Summe bis } n} + \underbrace{(n+1)q^n}_{\text{der Teil für } k=n+1}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kq^{k-1} &= \underbrace{\frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} +(n+1)q^n \\
&= \frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2} + \underbrace{\frac{(1-q)^2(n+1)q^n}{(1-q)^2}}_{\text{Nenner und Zähler } \cdot(1-q)^2} \\
&= \frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}+(1-q)^2(n+1)q^n}{(1-q)^2} \\
&= \frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}+(1-2q+q^2)(n+1)q^n}{(1-q)^2} \\
&= \frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}+nq^n+q^n-2nq^{n+1}-2q^{n+1}+nq^{n+2}+q^{n+2}}{(1-q)^2} \\
&= \frac{1+0+(n+2)q^{n+1}+(n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2} \text{ (gleiche Farben zusammen addieren)}
\end{aligned}$$

Also gilt (1) für $n+1$, d.h. die Implikation (ii) ist wahr.

□

Aufgabe 39

Mittel Auswertung der Teleskopsumme

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2 \tag{2}$$

leite man unter Verwendung der summenfreien Darstellung von $\sum_{k=0}^{n} 1$ für die Summe $\sum_{k=0}^{n} k$ eine geschlossene summenfreie Formel her und verifiziere diese anschliessend mittels vollständiger Induktion.
Lösung.

Herleitung. Eine *Teleskopsumme* hat folgende Eigenschaft:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2-k^2 &= \underbrace{1^2-0^2}_{k=0}+\underbrace{2^2-1^2}_{k=1}+\underbrace{3^2-2^2}_{k=2}+\ldots+\underbrace{(n+1)^2-n^2}_{k=n} = \\ &\text{(es bleiben nur den letzten und ersten Term)} \\ &= (n+1)^2-0^2 = n^2+2n+1\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Gleichzeitig gilt es

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2-k^2 = \sum_{k=0}^{n}(k^2+2k+1-k^2) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n}k+\underbrace{\sum_{k=0}^{n}1}_{1+1+\ldots+1=n+1} \tag{4}$$

(Achtung: $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ weil k von 0 bis n läuft!)
Aus (3) und (4) folgt

$$2\sum_{k=0}^{n}k+(n+1) = n^2+2n+1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{5}$$

Beweis. Zu zeigen ist

$$\forall n \in \mathbf{N} : \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

(i) Für $n=1$ haben wir:

$$\sum_{k=0}^{1} k = 0+1 = 1 = \frac{1\cdot 2}{2}\,.$$

(ii) Jetzt nehmen wir an, dass $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Wir müssen zeigen, dass $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n+1(n+2)}{2}$.
Wir berechnen die Summe:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k+n+1 &= \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} +n+1 = \\ &= \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

$\square$

Der Binomialkoeffizient

Sei eine Menge M mit n Elementen gegeben ($\mathrm{card}(M) = n$), sowie eine Zahl $k \in \mathbf{N}_0$. Wir definieren

$$\mathrm{Teil}_M(k) = \text{Anzahl den Teilmenge von } M, \text{ mit } \textit{genau } k \text{ Elementen}$$

Beispiele. Sei $k = n$. Die einzige Teilmenge von M mit n Elementen ist M selbst. Also ist:

$$\mathrm{Teil}_M(n) = 1.$$

Für $k = 0$, gibt es auch nur eine Teilmenge, die kein Element hat (die leere Menge), also:

$$\mathrm{Teil}_M(0) = 1.$$

Sei jetzt $k < n$. Wir wollen eine Formel für $\mathrm{Teil}_M(k)$ herleiten. D.h., wie viele mögliche Teilmenge mit k Elementen gibt es? Eine solche Teilmenge hat die Form:

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k\} \ (k \text{ Elementen}).$$

Für die Wahl des erstes Element b_1 haben wir n Möglichkeiten (es kann ein beliebiges Element von M sein). Für b_2 haben wir $n-1$ Möglichkeiten, für b_3 haben wir $n-2$ Möglichkeiten, usw. D.h., dass es gibt

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \tag{6}$$

Wege, eine Teilmenge mit k Elementen zu definieren.
Beispiele. Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $k = 2$. Wir wollen eine Teilmenge mit 2 Elementen

$$B = \{b_1, b_2\}$$

definieren. b_1 kann 1, 2, 3 oder 4 sein. Zum Beispiel $b_1 = 3$. Danach, kann b_2 nur 1, 2 oder 4 sein. Zum Beispiel

$$B = \{3, 1\}.$$

Achtung: wenn man zu erst $b_1 = 1$ und danach $b_2 = 3$ wahlen würde, hätte man am Ende die gleiche Teilmenge B!

Deswegen, müssen wir noch (6) durch den Anzahl den *Permutationen* dividieren (also, wenn man nur die Rheinfolge der Elementen ändert). In dem Beispiel, es gibt immer nur 2 Permutationen von 2 Elementen ((1,3) und (3,1)), und für ein beliebiges k, gibt es $k(k-1)(k-2)\ldots = k!$ Permutationen. Also, es gibt

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{k!} = \binom{n}{k} \tag{7}$$

Teilmenge von M mit k Elementen. Also entspricht der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ genau den Anzahl den Teilmenge mit k Elementen einer Menge mit n Elementen.

Aufgabe 40

Unter Verwendung des Prinzips der vollständigen Induktion bezüglich $n \in \mathbf{N}_0$ zeige man, daßfür sämtliche Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gilt:

$$\binom{n}{k} \in \mathbf{N}_0, \text{ für alle } n, k \in \mathbf{N}_0 \tag{8}$$

Man behandle dabei vorweg $k = 0$ sowie $k > n$ als Extrafälle.

Lösung. Wir definieren zuerst (siehe Vorlesung 09.01)

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1 & k = 0 \text{ (Extrafall)} \\ 0 & k > n \text{ (Extrafall)} \\ \frac{n!}{m!(n-k)!} & k \geq n \end{cases}$$

und die Aussage

$$A(n) := \forall k \in \mathbf{N}_0 : \binom{n}{k} \in \mathbf{N}_0 \,.$$

(Beachte: Die beide Extrafälle sind konsistent mit der Interpretation des Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ als Anzahl den Teilemenge mit Kardinalität k aus einer Menge mit n Elementen. Falls $n = 0$ (leere Menge), gibt es genau eine Teilmenge mit 0 Elementen (die leere Menge selbst), also wäre $\binom{0}{0} = 1$. Und wenn $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$ heisst, dass keine Teilmenge mit k Elementen gibt.)

Beweis. Aus der Definition folg

$$\binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k > 0 \,. \end{cases}$$

Also $\binom{0}{k} \in \mathbf{N}_0$, für alle $k \in \mathbf{N}_0$.
Wir müssen zeigen dass

- (i) für alle $k \in \mathbf{N}_0$, $\binom{1}{k} \in \mathbf{N}_0$ ($A(1)$ ist wahr)
- (ii) falls $\binom{n}{k} \in \mathbf{N}_0$ für alle $k \in \mathbf{N}_0$, dann gilt es auch $\binom{n+1}{k} \in \mathbf{N}_0$:

$$A(n) \Rightarrow A(n+1) \,.$$

(i) $A(1)$ folgt aus der Definition, weil:

$$\binom{1}{k} = \begin{cases} \frac{1!}{0!1!} = 1 & (k = 0, 1) \\ 0 & (k > 1) \end{cases}$$

also gehört $\binom{1}{k}$ zu $\mathbf{N}_0$ für alle $k \in \mathbf{N}_0$.

Um die Indkutionsschritt (ii) zu zeigen, unterscheiden wir zwischen drei Fälle:
(ii.a) $k > (n+1)$
(ii.b) $0 < k \leq n+1$
(ii.c) $k = 0$.
In Fall (ii.a), wenn $k > (n+1)$, ist dann (aus der Definition)

$$\binom{n+1}{k} = 0 \in \mathbf{N}_0$$

und wir sind fertig.
(ii.b) Falls $0 < k \leq n+1$, beweisen wir zuerst folgende Rekursionformel (siehe H-Aufgabe 40b!)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}. \tag{9}$$

Beweis von (9).

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)n!}{k(k-1)!(n+1-k)(n-k)!} = \\
&= \frac{(n+1)n! - n!k + n!k}{k(k-1)!(n+1-k)(n-k)!} = \text{ (einmal } +n!k \text{ und einmal } -n!k) \\
&= \frac{(n+1-k)n! + n!k}{k(k-1)!(n+1-k)(n-k)!} \text{ (jetzt trennen wir die obene Summe)} \\
&= \frac{(n+1-k)n!}{\underbrace{k(k-1)!}_{k!}(n+1-k)(n-k)!} + \frac{n!k}{k(k-1)!\underbrace{(n+1-k)}_{n-(k-1)}(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k} + \frac{n!k}{k(k-1)!\underbrace{(n+(k-1))(n-k)!}_{(n+(k-1)!}} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}
\end{aligned}$$

□

Also ist $\binom{n+1}{k+1}$ die Summe von zwei Zahlen, $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{k-1}$.
Aus der Induktionsvoraussetzung $A(n)$ folgt dass beide $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{k-1}$ zu $\mathbf{N}_0$ gehören ($A(n)$: $\binom{n}{k}$ für alle k !). Also ist $\binom{n+1}{k} \in \mathbf{N}_0$.
(ii.c) Falls $k = 0$ haben wir (aus der Definition)

$$\binom{n+1}{0} = 1 \in \mathbf{N}_0\,.$$

□

Aufgabe 41

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Bernoullische Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \text{ für alle } n \in \mathbf{N}_0 \text{ und } x \in [-1,+\infty[\text{ beliebig} \tag{10}$$

Lösung
Man muss zeigen dass

- (i) die Gleichung (10) gilt für $n = 1$;
- (ii) wenn (10) für n gilt, dann gilt es auch für $n+1$:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x\,.$$

und auch dass die Gleichung (10) für $n = 0$ gilt.
Beweis. Zuerst beachten wir, dass aus der Bedienung $x \in [-1,+\infty[$ foltg

$$1+x \geq 0\,.$$

Der Beweis für $n = 0$ ist einfach:

$$(1+x)^0 = 1, \text{ und } 1+0\cdot x = 1\,.$$

Für (i), setzen wir $n = 1$ in (10):

$$(1+x)^1 = 1+1\cdot x$$

(also, es ist wahr).
Für (ii), nehmen wir an, dass für ein gegebene $n \in \mathbf{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$ (Indkutionsvoraussetzung), und wir müssen zeigen, dass es gilt:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x\,.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \underbrace{\geq}_{\text{Achtung! } 1+x\geq 0} (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2$$

Da für die rechte Seite gilt:

$$1+nx+x+nx^2 \geq \underbrace{1+nx+x}_{1+(n+1)x}$$

folgt

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x\,.$$

□