FU Berlin: WiSe 13-14 (Analysis 1 - Lehr.)
Übungsaufgaben – Zettel 8

Aufgabe 28

(Siehe Lösungen Übungszetter nr. 7)

Aufgabe 32

Wir nehmen an, dass die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eindeutig definiert ist, durch die zwei Eigenschaften

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \ \exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) + \exp(x_2), \tag{1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \exp(x) \geq 1 + x \, . \tag{2}$$

Zeigen Sie dass (10.12.2013):
1.a) $\exp(0) = 1$
Beweis. Aus $0 + 0 = 0$ und (1) folgt:

$$\exp(0) = \exp(0 + 0) = \exp(0) \cdot \exp(0) = \exp(0)^2 \, .$$

Also erfüllt $\exp(0)$ die Gleichung:

$$\exp(0) = \exp(0)^2 \, .$$

Es gibt dann nur zwei mögliche Fälle, nämlich $\exp(0) = 0$ oder $\exp(0) = 1$.
Aus (2) ($\exp(x) \geq 1+x$) ist aber den Fall $\exp(0) = 0$ ausgeschlossen, und es folgt $\exp(0) = 1$. □
1.b) $\forall x \in \mathbb{R} : \ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus Teil (1.a) folgt:

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) \underbrace{=}_{\text{aus (1)}} \exp(x) \cdot \exp(-x) \, .$$

D.h.

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \, .$$

□

1.c) $\forall x \in \mathbb{R} : \ \exp(x) > 0$
Beweis. Wir betrachten die zwei Fälle: (i) $x \geq 0$ und (ii) $x < 0$.
(i) Falls $x \geq 0$ folgt (aus (2)):

$$\exp(x) \geq 1 + x > 0 \, .$$

(ii) Falls $x < 0$, dann ist $(-x) > 0$, und deswegen $\exp(-x) > 0$ (siehe Fall (i)!). Dann:

$$\exp(x) \underbrace{=}_{\text{aus Teil (1.b)}} \frac{1}{\exp(-x)} \underbrace{>}_{\text{weil } \exp(-x)>0} 0\,.$$

□

1.d) exp is streng monoton, d.h. $x_1 > x_2 \Rightarrow \exp(x_1) > \exp(x_2)$

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 > x_2$. Aus $x_1 - x_2 > 0$ und (2) folgt

$$\exp(x_1 - x_2) \geq 1 + (x_1 - x_2) > 1\,. \tag{3}$$

Aus Teil (1.b) folgt dann

$$1 < \exp(x_1 - x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(-x_2) = \frac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)} \Rightarrow \exp(x_1) > \exp(x_2)\,.$$

□

2.a) Ist $\mathrm{e} = \exp(1)$, so ist

(i) $\exp(n) = \mathrm{e}^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ beliebig, sowie

(ii) $\exp(r) = \mathrm{e}^r = \sqrt[m]{\mathrm{e}^n}$ für jede rationale Zahl $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$

Beweis (i). Sei $n \in \mathbb{Z}$. Falls $n > 0$, gilt

$$\begin{aligned}\exp(n) &= \exp(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\,\text{Mal}}) = \exp(1 + \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n-1 Mal}) = \\ &= \exp(1)\exp(\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n-1 Mal}) = \text{usw.} \\ &= \exp(1) \cdot \cdot \exp(1) \ldots \exp(1) = \exp(1)^n = \mathrm{e}^n\,.\end{aligned}$$

Falls $n < 0$, dann ist $(-n) > 0$, also gilt $\exp(-n) = \mathrm{e}^{-n}$ (siehe oben). Also:

$$\exp(n) = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-n}} = (\mathrm{e}^{-n})^{-1} = \mathrm{e}^n\,.$$

Der letzter Schritt folg aus einer Eigenschaft von *Potenzfunktion*. D.h., einmal dass wir bewiesen haben, dass $\exp(n) = \mathrm{e}^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ ist, konnen wir dann die Eigenschaft $\mathrm{e}^{\mathrm{ab}} = (\mathrm{e}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{b}}$ benutzen (sowie auch alle andere Eigenschaften) !

Beweis (ii). Jetzt sei $r = \frac{n}{m}$. Wir nehmen an, dass $m > 0$ (falls $r < 0$ ist, dan kann man trotzdem $m > 0$ und $n < 0$ nehmen). Aus $n = m \cdot \frac{n}{m}$ folgt:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^n = \exp(n) &= \exp\left(m \cdot \frac{n}{m}\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{n}{m}\right) \cdot \exp\left(\frac{n}{m}\right) \cdot \ldots \cdot \exp\left(\frac{n}{m}\right)}_{m\ \text{Mal}} \\ &= \left[\exp\left(\frac{n}{m}\right)\right]^m\end{aligned}$$

Dann ziehen wir den m-Wurzel links und rechts:

$$\left[\exp\left(\frac{n}{m}\right)\right] = (\mathrm{e}^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\mathrm{e}^n}\,.$$

$\square$

2.b) Die Umkehrfunktion $\ln = \exp^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ zur Funktion exp erfüllt die Funktionalgleichung

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2),$$

für alle $x_1, x_2 \in]0, +\infty[$.

Beweis. Beachte, dass Umkehrfunktion

$$\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \ \exp \circ \ln = \mathrm{id}_{]0,+\infty[}$$

bedeutet. Daraus folgt, für alle $x_1, x_2 \in]0, +\infty[$:

$$\exp\left(\ln(x_1) + \ln(x_2)\right) \underbrace{=}_{\text{aus } (1)} = \exp(\ln(x_1)) \cdot \exp(\ln(x_2)) = x_1 \cdot x_2\,.$$

Da $\exp\left(\ln(x_1) + \ln(x_2)\right) \in]0, +\infty[$ (siehe Teil 1.c) und $x_1 \cdot x_2 \in]0, +\infty[$ (also beides gehören zum Definitionsbereich der Funktion ln) berechnen wir ln links und rechts in der obene Gleichung:

$$\ln\left(\exp\left(\ln(x_1) + \ln(x_2)\right)\right) = \ln(x_1 \cdot x_2) \underbrace{\Rightarrow}_{\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \ln(x_1) + \ln(x_2) = \ln(x_1 \cdot x_2)\,.$$

$\square$

2.c) Die Funktion exp ist konvex, d.h. es gilt:

$$\exp\left(\frac{x1 + x2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\exp(x_1) + \exp(x_2)\right) \tag{4}$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: die Definition von Konvexität einer reelle Funktion ist etwa allgemeiner.

Beweis. Zuerst, beachte dass die rechte Seite von (4) den *arithmetische Mittelwert* $A(\exp(x_1), \exp(x_2))$ von $\exp(x_1)$ und $\exp(x_2)$ entspricht (Übungszettel 4, Aufgabe 15).

Jetzt zeigen wir:

$$\text{(2.c.i) } \forall x \in \mathbb{R} : \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$$

Beweis. Es folgt aus

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$$

$\square$(2.c.i)

Um die Ungleichung zu beweisen, berechnen wir

$$\exp\left(\frac{x1 + x2}{2}\right) \underbrace{=}_{\text{aus Teil (2.b)}} \sqrt{\exp(x_1 + x_2)} = \sqrt{\exp(x_1)} \cdot \sqrt{\exp(x_2)} =$$

$$= G(\exp(x_1), \exp(x_2))$$

($\textit{geometrische}$ Mittelwert von $\exp(x_1)$ und $\exp(x_2)$).
Wie bereits in Aufgabe 15 bewiesen (Übungszettel 4), es gilt

$$G(\exp(x_1), \exp(x_2)) \leq A(\exp(x_1), \exp(x_2)),$$

also ist auch (4) bewiesen. $\square$

Aufgabe 34 (Additionstheorem)

Definition. Für einen rechtwinkligen Dreieck ΔAOB, mit rechtem Winkel in O (Bild 1, links), sind Sinus und Cosinus des Winkels α so definiert:

$$\sin(\alpha) = \frac{|AO|}{|AB|} \text{ (Gegenkathete durch Hypothenuse)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|OB|}{|AB|} \text{ (Ankathete durch Hypothenuse).}$$

Gegeben seien die drei rechtwinkligen Dreiecke ΔSCD, ΔSCA und ΔSAB mit entsprechenden Innenwinkeln α, β und $\alpha + \beta$ in S gemäßder folgenden Skizze (Bild 1, rechts):

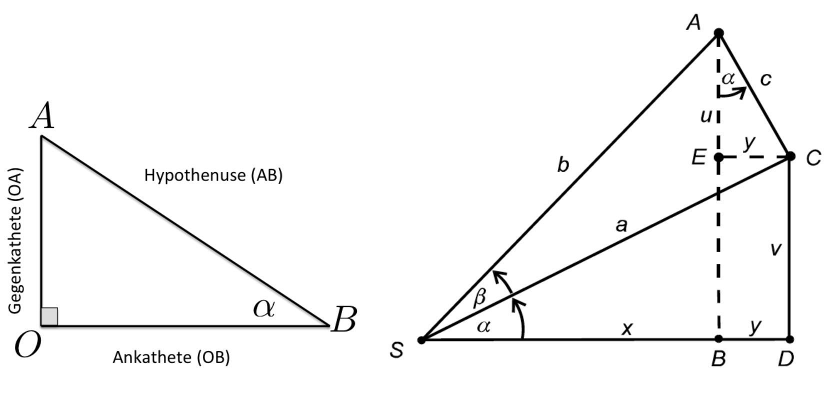

Figure 1: Aufgabe 34.

(a) Leiten Sie aus der Skizze das Additionstheorem für den Sinus her:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)\,.$$

Tipp: Benutzen Sie an entscheidender Stelle, dass $|EB| = |CD|$ ist.
Beweis. Wir suchen nach

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{|AB|}{|AS|} = \frac{|AE| + |EB|}{|AS|} = \frac{|AE| + |CD|}{|AS|} = \underbrace{\frac{|AE|}{|AC|}\frac{|AC|}{|AS|}}_{=\frac{|AE|}{|AS|}} + \underbrace{\frac{|CD|}{|CS|}\frac{|CS|}{|AS|}}_{=\frac{|CD|}{|AS|}} \tag{5}$$

(mit diesem Schritt "trennen" wir den Dreieck ΔASB, der den Winkel $\alpha + \beta$ enthält, in vier Dreiecke ΔACE, ΔASC, ΔCDS, ΔCAS, die nur die Winkeln α oder β enthälten).
Dann folgt, aus den Definitionen von Sinus und Cosinus:

$$\frac{|AC|}{|AS|} = \sin(\beta),\ \frac{|CD|}{|CS|} = \sin(\alpha),\ \frac{|CS|}{|AS|} = \cos(\beta) \tag{6}$$

Dazu, hat man auch dass der Winkel $E\hat{A}C$ auch gleich α:

$$S\hat{C}B = 90 - \alpha \Rightarrow S\hat{C}E = \alpha \Rightarrow E\hat{C}A = 90 - \alpha \Rightarrow E\hat{A}C = \alpha\,.$$

Und daraus folgt dass $\frac{|AE|}{|AC|} = \cos(\alpha)$, also (aus (5) und (6))

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\,.$$

$\square$.

Aufgabe 35

Ausgehend von den in Aufgabe 34 bewiesenen Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ leite man die Gültigkeit folgender Gleichungen her:

(i) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

(ii) $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$

(iii) $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

(iv) $\tan(x_1 + x_2) = \dfrac{\tan(x_1) + \tan(x_2)}{1 - \tan(x_1)\tan(x_2)}$

Lösung
(i) Es gibt für Teil (i) zwei mögliche Lösungen, eine *geometrische* Lösung und eine *Trigonometrische* Lösung.
Geo. Aus den Definitionen von Sinus und Cosinus (siehe Bild 1, links), und aus der Satz von Pithagora folgt:

$$1 = \frac{|AB|^2}{|AB|^2} = \frac{|AO|^2 + |OB|^2}{|AB|^2} = \left(\frac{|AO|}{|AB|}\right)^2 + \left(\frac{|OB|}{|AB|}\right)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\,.$$

Trigo. Aus

$$\sin(0) = \sin(0+0) = (\sin(0)\cos(0))^2,$$
$$\cos(0) = \cos(0+0) = \cos^2(0) - \sin^2(0)$$

folgt (siehe Vorlesung, 19.12)

$$\sin(0) = 0,\ \cos(0) = 1\,.$$

Dann folgt

$$1 = \cos(x - x) = \cos(x + (-x)) = \cos(x)\cos(-x) + \sin(x)\sin(-x)\,. \tag{7}$$

Die Funktionen sin und cos würden erstmal nur an Dreieck definiert (Definitionsbereich $]0, \frac{\pi}{2}[$, die können aber erweiter werden, durch die *gerade* und *ungerade* Fortsetzungen (siehe Vorlesung, 19.12):

$$\sin(-x) = -\sin(x),\ \cos(-x) = \cos(x).$$

Die Gleichung (7) wird dann:

$$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)\,.$$

$\square$

(ii) Aus Aufgabe 34(b) folgt (mit $\alpha = \beta = x$):

$$\cos(2x) = cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)\,.$$

(iii) Aus Aufgabe 34(a) folgt (mit $\alpha = \beta = x$):

$$\sin(2x) = cos(x + x) = \sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)\,.$$

(iv) Aus Aufgabe 34 folgt:

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\sin(x_1 + x_2)}{\cos(x_1 + x_2)} = \frac{\sin(x_1)\cos(x_2) + \sin(x_2)\cos(x_1)}{\cos(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_1)\sin(x_2)} =$$

$$\underbrace{=}_{\left(\cdot\frac{\cos(x_1)\cos(x_2)}{\cos(x_1)\cos(x_2)}\right)} \frac{\frac{\sin(x_1)}{\cos(x_1)} + \frac{\sin(x_2)}{\cos(x_2)}}{1 - \frac{\sin(x_1)\sin(x_2)}{\cos(x_1)\cos(x_2)}} = \frac{\tan(x_1) + \tan(x_2)}{1 - \tan(x_1)\tan(x_2)}$$