FU Berlin: WiSe 13-14 (Analysis 1 - Lehr.)

Übungsaufgaben – Zettel 11

Aufgabe 47

Wir betrachten die Menge $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ zusammen mit den Verknüpfungen:

$$(a,b)+(c,d) = (a+b, c+d),\ \ a,b,c,d \in \mathbb{Q}$$
$$(a,b)*(c,d) = (ac+2bd, ac+bd),\ \ a,b,c,d \in \mathbb{Q}$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Tatsache, dass $(K,+)$ bereits eine abelsche Gruppe ist:

(a) $(K,+,*)$ ist ein Körper. Wie sieht insbesondere das neutrale Element der Multiplikaton und das zu $(a,b) \neq (0,0)$ inverse Element $(x,y) = (a,b)^{-1} \in K$ aus?

Lösung. Es sind zuerst die Körperaxiome zu zeigen. Unter die Annhame, dass $(K,+)$ bereits eine abelsche Gruppe ist, es fehlen nur die Axiome für die Multiplikation und die Existent eines bezüglich $*$ neutrales und inverses Element. Beachte: Da ein inverse Element für jedes Element existiert, ausser für den $+$-neutrales Element, wissen wir schon, dass $(0,0)$ das $+$-neutrale Element ist. Wir zeigen zu erst

- (AG – Assoziativgesetz) $[(a,b)*(c,d)]*(e,f) = (a,b)*[(c,d)*(e,f)]$
- (DG) $(a,b)*[(c,d)+(e,f)] = [(a,b)*(c,d)]+[(a,b)*(e,f)]$

Beweis.
(AG)

$$\begin{aligned}&[(a,b)*(c,d)]*(e,f) = (ac+2bd, ad+bc)*(e,f) = \\ &= ((ac+2bd)e + 2(ad+bc)f, (ac+2bd)f + (ad+bc)e)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&(a,b)*[(c,d)*(e,f)] = (a,b)*(ce+2df, cf+de) = \\ &= (a(ce+2df)+2b(cf+de), a(cf+de)+b(ce+2df)) = [(a,b)*(c,d)]*(e,f)\,.\end{aligned}$$

(DG)

$$\begin{aligned}&(a,b)*[(c,d)+(e,f)] = (a,b)*(c+e, d+f) = \\ &= (a(c+e)+2b(d+f), a(d+f)+b(c+e)) = \\ &= (ac+2bd+ae+2bf, ad+bd+af+be) = [(a,b)*(c,d)]+[(a,b)*(e,f)]\end{aligned}$$

$\square$

(IE) Wie sieht insbesondere das neutrale Element der Multiplikaton aus?
Sei (c, d) das neutrale Element der Multiplikation. Es muss gelten:

$$\forall (a, b) \in K : (a, b) * (c, d) = (a, b)$$

Also:

$$\forall (a, b) \in K : (ac+2bd, ad+bc) = (a, b) \Rightarrow \forall (a, b) \in K : \; ac+2bd = a \wedge ad+bc = b\,.$$

Wenn es $\forall (a, b) \in K$ gelten muss, es gilt insbesonderes für $a = 0$. Also:

$$\Rightarrow \forall b \in K 2bd = 0 \wedge bc = b\,.$$

Und daraus folgt dass:

$$c = 1, d = 0\,.$$

Also, $(1, 0)$ ist das neutrale Element der Multiplikation.
(IE) Wie sieht das zu $(a, b) \neq (0, 0)$ inverse Element $(x, y) = (a, b)^{-1} \in K$ aus?
Sei $(a, b) \in K$ beliebig, mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Wir suchen ein Element (x, y) so dass:

$$(a, b) * (x, y) = (1, 0)\,.$$

Also muss es gelten:

$$ax + 2by = 1 \wedge bx + ay = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Linearessystem muss nach x und y gelöst werden. Mann kan (z.B.) zuerst

$$bx + ay = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{b} y$$

berechnen, und dann

$$a(-\frac{a}{b} y) + 2by = 1$$

einsetzen. Es folgt:

$$y \left(-\frac{a^2}{b} + 2b \right) = 1 \Rightarrow y = -\frac{b}{a^2 - 2b^2}$$

und

$$x = -\frac{a}{b} y = -\frac{a}{b} \left(-\frac{b}{a^2 - 2b^2} \right) = \frac{a}{a^2 - 2b^2}$$

Also ist

$$\left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}, -\frac{b}{a^2 - 2b^2} \right)$$

das inverse Element zu $(a, b) \in K$.
Beachte: $\forall a, b \in \mathbb{Q} : a^2 - 2b^2 \neq 0$!

(b) Durch $\phi : \mathbb{Q} \to K$ mit $\phi(a) = (a, 0)$, $a \in \mathbb{Q}$ wird der "alte" Bereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen strukturverträglich in den neuen Zahlbereich $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ eingebettet. Das heißt:

- (i) ϕ bildet $\mathbb{Q}$ bijektiv auf $\mathbb{Q} \times \{0\}$ ab,
- (ii)$\forall a, b \in \mathbb{Q}$, $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b) \wedge \phi(ab) = \phi(a) * \phi(b)$

Beweis.
(i). ϕ ist injektiv:

$$\phi(a) = \phi(b) \Rightarrow (a,0) = (b,0) \Rightarrow a = b\,.$$

und $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \{0\}$ ist surjektiv, weil: $\forall (a,0) \in \mathbb{Q} \times \{0\}$, gilt (aus der Definition)

$$\phi^{-1}(\{(a,0)\}) = \{x \in \mathbb{Q} : \phi(x) = (a,0)\} = \{a\} \neq \{\}$$

(das Urbild ist nicht leer).

(ii).

$$\phi(a+b) = (a+b,0) \underbrace{=}_{\text{Def. von } +} (a,0) + (b,0) \underbrace{=}_{\text{Def. von } \phi} \phi(a) + \phi(b)\,.$$

$$\phi(a) * \phi(b) = (a,0) * (b,0) \underbrace{=}_{\text{Def. von } *} (ab + 2 \cdot 0 \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 0) = (ab, 0) = \phi(ab)$$

□

(c) Zeigen Sie: Die "Zahl" $\alpha = (0,1) \in K$ ist Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbf{Q}[x]$ mit rationalen Koeffizienten. Schreibt man zudem $\sqrt{2}$ für $\alpha = (0,1)$ so besitzt weiter jedes $x = (a,b) \in K$ eindeutig die Darstellung $x = a + b\sqrt{2}$. Man schreibt dann für K auch $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und sagt: "$\mathbb{Q}$ adjungiert Wurzel 2".

Lösung. Wir schreiben zu erst das Polynom $f(x)$ mit Hilfe der Einbettung $\phi(x)$ als

$$f(x) = x^2 - (2,0)$$

und zeigen dann das α eine Nullstelle in $\mathbf{K}$ ist:

$$f(\alpha) = (0,1) * (0,1) - (2,0) \underbrace{=}_{\text{Definition von } *} (0+2,0) - (2,0) = (0,0)$$

Wir definieren jetzt die Menge "$\mathbb{Q}$ adjungiert Wurzel 2" als:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

(der kleinste Körper der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält, siehe LinAlg!). Man kann zeigen dass die Körperaxiome (in Teil (a)) für $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gelten:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\
(a,b) & \to & a + b\sqrt{2} \\
(a,b) * (c,d) = (ac+2bd, ad+bc) & \to & (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} \\
(1,0)*\text{-inverse Element} & \to & 1 + 0 \cdot \sqrt{2} = 1 \\
(a,b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2-2b^2}, -\dfrac{b}{a^2-2b^2}\right) & \to & (a+b\sqrt{2})^{-1} = \dfrac{a}{a^2-2b^2} - \dfrac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \\
\alpha = (0,1) \text{ Nullstelle von } x^2 - 2 & \to & 0 + 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ Nullstelle von } x^2 - 2
\end{array}$$

Aufgabe 49

Bestimmen Sie für folgende komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ die kartesische Darstellung $z = a + ib$ die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} = a - ib$ sowie den Betrag $\|z\| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$:

- (i) $z = \frac{2i}{i+1}$. Wir bestimmen die Darstellung von z als $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

  $$z = \frac{2i}{i+1} \cdot \frac{i-1}{i-1} = \frac{2i \cdot (i-1)}{-1-1} = \frac{-2-2i}{-2} = 1 + i \Rightarrow z = (1, 1)$$

  Die koniugiert komplexe Zahl und den Betrag lauten:

  $$\overline{z} = 1 - i, \; \|z\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,.$$

- (ii) $z = \frac{10-5i}{1+2i}$

  $$z = \frac{10-5i}{1+2i} \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{20+15i}{1+4} = 4 + 3i \Rightarrow z = (4, 3)$$

  Die koniugiert komplexe Zahl und den Betrag lauten:

  $$\overline{z} = 4 - 3, \; \|z\| = \sqrt{16+9} = 5\,.$$

- (iii) $z = \sum_{k=0}^{26} i^k$
  Option 1. Wir zeigen zuerst:

  $$\sum_{k=0}^{n} i^k = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$$

  Beweis (Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$).
  (IA) Für $n = 0$ ist

  $$\sum_{k=0}^{0} i^k = 0 = \frac{1 - i^0}{1 - i}\,.$$

  (IB) $(n \to n+1)$. Wir nehmen an dass $\sum_{k=0}^{n} i^k = \frac{1-i^{n+1}}{1-i}$ und berechnen

  $$\sum_{k=0}^{n+1} i^k = \sum_{k=0}^{n} i^k + i^{k+1} \underbrace{=}_{\text{Induktionvoraussetzung}} \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i} + i^{k+1} =$$

  $$\frac{1 - i^{k+1} + i^{k+1} - i^{k+2}}{1 - i} = \frac{1 - i^{n+2}}{1 - i}$$

  Also ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Aus dieser Formel folgt

$$z = \sum_{k=0}^{26} i^k = \frac{1 - i^{27}}{1 - i} = \frac{1 - i^{2\cdot 13+1}}{1 - i} \underbrace{=}_{i^2=-1} = \frac{1 - (-1)^{13} \cdot i}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 - i}$$

Also ist:

$$z = \frac{1 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{1 - i^2 + 2i}{1 + 1} = i \Rightarrow z = (0, 1)\,.$$

Option 2. Es gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \; i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0$$

Beweis. Aus $i^2 = -1$, und $i^3 = -i$ folgt

$$i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = i^k \left(i^0 + i + i^2 + i^3\right) = i^k(1 + i - 1 - i) = 0\,.$$

□

Also z kann man umschreiben als:

$$z = \sum_{k=0}^{26} i^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{3} i^k}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=4}^{7} i^k}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=8}^{11} i^k}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=12}^{15} i^k}_{=0}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=16}^{19} i^k}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=20}^{23} i^k}_{=0} + \sum_{k=24}^{26} i^k = i^{24}(i^0 + i + i^2) = \underbrace{i^{2\cdot 12}}_{(-1)^{12}=1} (1 + i - 1) = i\,.$$

Die koniugiert komplexe Zahl und den Betrag lauten:

$$\overline{z} = -i, \; \|z\| = \sqrt{0 + 1} = 1\,.$$

Rationale Nullstellen eines Polynoms

Sei $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ ein Polynom mit $\mathrm{grad}(f) = n$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Ist $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eine rationale Nullstelle von $f(x)$ (mit p und q teilerfremd) dann muss es gelten:

$$p | a_0 \wedge q | a_n \; (p \text{ teilt } a_0 \text{ und } q \text{ teilt } a_n)$$

Beweis. $\alpha = \frac{p}{q}$ ist eine Nullstelle wenn es gilt $f(\alpha) = 0$, d.h.

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 + a_1 \frac{p}{q} + a_2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n = 0$$

Daraus folgt dass

$$0 = a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \ldots a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n$$

Aus der letzter gleichung folgt dass

$$a_0 q^n = \underbrace{-\left(a_1 q^{n-1} + \ldots a_n p^{n-1}\right)}_{r} p, a_n p^n = \underbrace{-\left(a_0 q^n + \ldots a_{n-1} p^{n-1}\right)}_{s} q,$$

also:

$$a_0 q^n = rp, a_n p^n = sq\,.$$

Aber das heisst, dass p teilt das Produkt $a_0 q^n$ sowie q teilt das Produkt $a_n p^n$. Wenn p aber $a_0 q^n$ teilt, muss dann p a_0 oder q^n teilen. Da p und q teilerfremd sind, es folgt dass $p | a_0$. Analog, aus $q | a_n p^n$ folgt dass $q | a_n$. □

Beispiel 1

Wir suchen alle rationale Nullstellen von

$$f(x) = 4 - 7x^2 + 3x^4\,.$$

Schritt 1. Ist $\alpha = \frac{p}{q}$ eine rationale Nullstelle von $f(x)$, dann gilt

$$p|4\ ,\ q|3$$

(p teilt a_0 und q teilt a_n). Da die Teiler von 4 nur ± 1, ± 2, ± 4 sind, und die Teiler von 3 nur ± 1 und ± 3 sind, gibt es nur 12 mögliche rationale Nullstellen:

$\frac{p}{q}$	± 1	± 2	± 4
1	± 1	± 2	± 4
3	$\pm \frac{1}{3}$	$\pm \frac{2}{3}$	$\pm \frac{4}{3}$

Schritt 2. Die Funktion $f(x)$ ist gerade ($f(x) = f(-x)$). Also, ist α eine Nullstelle, dann ist auch $-\alpha$ eine Nullstelle.
Schritt 3. Wir müssen jetzt nur 6 mögliche Zahlen nachprüfen.

$$f(1) = 0, f(2) \neq 0\,, f(4) \neq 0\,, f\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0\,, f\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0\,, f\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\,.$$

Also hat $f(x)$ 2 rationale Nullstellen (1 und -1).

Beispiel 2

Das Polynom $f(x) = 1 + 2x^2 + 30x^3 - 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + x^7$ hat keine rationale Nullstelle.
Beweis. Wenn $f(x)$ eine rationale Nullstelle $\frac{p}{q}$ hat, dann gilt: $p|a_0 = 1$ und $q|a_n = 1$. Also

$$p = \pm 1,\ q = \pm 1$$

d.h., die einzige mögliche rationale Nullstellen sind 1 und -1. Aber:

$$f(1) = 1 + 2 + 20 - 4 + 5 + 7 + 1 = 32, f(-1) = 1 + 2 - 30 - 4 - 5 + 7 - 1 = -30\,.$$

Also hat f keine rationale Nullstelle. $\square$