FU Berlin: WiSe 13-14 (Analysis 1 - Lehr.)
Probleklausur

---

## Aufgabe 1

Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei gegeben durch die Folgenvorschrift

$$a_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right)\ (n\in\mathbb{N}_0) \tag{1}$$

Leiten Sie fr die Koeffizienten $a_n$ eine produktfreie Darstellung her und beweisen Sie anschließend Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion über $n\in\mathbb{N}_0$.
**Lösung.**
Um eine produktfreie Darstellung herzuleiten, ist es immer nötig die Folgenvorschrift aus verschiedenen Sichtpunkte sich anzuschauen (z.B. **umschreiben**, **als Rekursionvorschrift**, **mti $n$-abhängige Formel**).
Also, **erste Idee:** wir berechnen einige Koeffizienten der Folge:

$$a_0 = \prod_{k=1}^{0}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = 1 \text{ (leeres Produkt!)}$$

$$a_1 = \prod_{k=1}^{1}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = 1-\frac{1^2}{3^2} = \frac{8}{9}$$

$$a_2 = \prod_{k=1}^{2}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = \left(1-\frac{4}{16}\right)\underbrace{\frac{8}{9}}_{a_1} = \frac{12}{16}\cdot\frac{8}{9} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \prod_{k=1}^{3}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = \left(1-\frac{9}{25}\right)\cdot\underbrace{\left(1-\frac{4}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)}_{\frac{2}{3}} = \frac{16}{25}\cdot\frac{12}{16}\cdot\frac{8}{9}$$

$$a_4 = \frac{20}{36}\cdot\frac{16}{25}\cdot\frac{12}{16}\cdot\frac{8}{9} = \frac{4\cdot 5}{6^2}\cdot\frac{4\cdot 4}{5^2}\cdot\frac{4\cdot 3}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 2}{3^2}$$

$$\ldots$$

Vielleicht kann jemand schon ein Patron in $a_4$ merken...
**Ein alternativer Weg** ist folgendes. Zuerst schreiben wir um:

$$\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = \frac{k^2+4k+4-k^2}{(k+2)^2} = \frac{4(k+1)}{(k+2)^2} \tag{2}$$

dann noch die Terme (bis zum Term $n$) formel hin:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \prod_{k=0}^{n} \frac{4(k+1)}{(k+2)^2} = \\
&= \underbrace{1}_{k=0} \cdot \underbrace{\frac{4\cdot 2}{3^2}}_{k=1} \cdot \underbrace{\frac{4\cdot 3}{4^2}}_{k=2} \cdot \underbrace{\frac{4\cdot 4}{5^2}}_{k=3} \cdots \underbrace{\frac{4(n+1)}{(n+1)^2}}_{k=n}
\end{aligned}
$$

Auf Zähler, es gibt immer ein 4, also $n$-mal $4 \Rightarrow 4^n$, d.h.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \prod_{k=0}^{n} \frac{4(k+1)}{(k+2)^2} = \\
&= 4^n \underbrace{1}_{k=0} \cdot \underbrace{\frac{2}{3^2}}_{k=1} \cdot \underbrace{\frac{3}{4^2}}_{k=2} \cdot \underbrace{\frac{4}{5^2}}_{k=3} \cdots \underbrace{\frac{(n+1)}{(n+2)^2}}_{k=n}
\end{aligned}
$$

und danach, noch das Produkt aller Zahlen, 1 bis $n+1$, also $(n+1)!$:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \prod_{k=0}^{n} \frac{4(k+1)}{(k+2)^2} = \\
&= 4^n (n+1)! \underbrace{1}_{k=0} \cdot \underbrace{\frac{1}{3^2}}_{k=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{4^2}}_{k=2} \cdot \underbrace{\frac{1}{5^2}}_{k=3} \cdots \underbrace{\frac{1}{(n+2)^2}}_{k=n}
\end{aligned}
$$

Auf den Nenner, gibt es *fast* das Produkt alle Zahlen zum Quadrat. Fast, weil es noch $2^2$ fehlt. Wir konnen es zo umschreiben:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \prod_{k=0}^{n} \frac{4(k+1)}{(k+2)^2} = \\
&= 4^n (n+1)! \cdot \frac{2^2}{2^2} \cdot \underbrace{1}_{k=0} \cdot \underbrace{\frac{1}{3^2}}_{k=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{4^2}}_{k=2} \cdot \underbrace{\frac{1}{5^2}}_{k=3} \cdots \underbrace{\frac{1)}{(n+1)^2}}_{k=n} \\
&= 4^{n+1} (n+1)! \cdot \underbrace{1}_{k=0} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{3^2}}_{k=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{4^2}}_{k=2} \cdot \underbrace{\frac{1}{5^2}}_{k=3} \cdots \underbrace{\frac{1}{(n+2)^2}}_{k=n}
\end{aligned}
$$

Jetzt, beachte dass:

$$
\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{4^2} \cdots \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{1}{(n+2)!}
$$

also gilt

$$
a_n = 4^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot \frac{1}{(n+2)!} = 4^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot \frac{1}{(n+1)! \cdot (n+2)} \frac{1}{(n+2)!}
$$

Eine Vermutung wäre dann

$$a_n = \frac{1}{n+2} \cdot \frac{4^{n+1}}{(n+2)!}$$

(Wichtig: danach kann man noch ein Check mit den Werte $k = 0, 1, 2, 3$ machen!)
Also, zu beweisen ist:

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^2}{(k+2)^2}\right) \Rightarrow a_n = \frac{1}{(n+2)} \frac{4^{n+1}}{(n+2)!}, \ n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

*Beweis (Induktion über $n \in \mathbf{N}_0$).*
($n = 0$): $a_0 = 4\frac{1}{(0+2)}\frac{4^0}{(2)!} = 1$ und $a_0 = \prod_{k=1}^{0} \left(1 - \frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = 1$ (leeres Produkt).
($n \to n+1$): Wir nehmen an, dass $a_n = 4\frac{1}{(n+2)}\frac{4^n}{(n+2)!}$ und berechnen nach der Definition (1)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \prod_{k=0}^{n+1} \left(1 - \frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = \left(1 - \frac{(n+1)^2}{(n+1+2)^2}\right) a_n \\ &\underbrace{=}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} \frac{4(n+2)}{(n+3)^2} \left(\frac{1}{(n+2)} \frac{4^{n+1}}{(n+2)!}\right) \\ &= \left(\frac{1}{(n+3)} \frac{4^{n+2}}{(n+3)!}\right) \end{aligned}$$

Und damit ist die Induktionsbehauptung auch bewiesen. □

## Aufgabe 2

Unter Zuhilfenahme einer geeigneten Tabelle bestimme man die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichung und skizziere sie auf der reellen Zahlengeraden:

$$\frac{4 \cdot |x-2|}{2x-1} < 1 \tag{3}$$

**Lösung.** Wir unterscheiden zuerst zwei Fälle: (i) $2x - 1 > 0$ ($x > \frac{1}{2}$) und (ii) $2x - 1 < 0$ ($x < \frac{1}{2}$).
Für (i) ($x > \frac{1}{2}$) Es muss gelten:

$$4 \cdot |x-2| < 2x - 1 \Rightarrow |x-2| < \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

(i.1) Falls $x \geq 2$:

$$x - 2 < \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} < \frac{7}{4} \Rightarrow x < \frac{7}{2}$$

Also haben wir für $x$ folgende Bedienungen:

$$x > \frac{1}{2} \wedge x \geq 2 \wedge x < \frac{7}{2} \Rightarrow 2 \leq x < \frac{7}{2}$$

(i.2) Falls $x < 2$:

$$-(x-2) < \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{3x}{2} < -\frac{9}{4} \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

Also:

$$x > \frac{1}{2} \wedge x < 2 \wedge x > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$$

Insgesamt für Fall (i) lautet die Lösung:

$$\underbrace{2 \leq x < \frac{7}{2}}_{\text{Fall (i.1)}} \vee \underbrace{\frac{3}{2} < x < 2}_{\text{Fall (i.2)}} \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{7}{2}$$

Für (ii) ($x < \frac{1}{2}$) Es muss gelten:

$$4 \cdot |x-2| > 2x - 1 \Rightarrow |x-2| > \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

(ii.1) Der Fall $x \geq 2$ kann schon ausgeschlossen werden, da es $x < \frac{1}{2} < 2$ ist. Also gilt $|x-2| = 2 - x$:

$$2 - x > \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{3x}{2} > -\frac{9}{4} \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

Also haben wir für $x$ folgende Bedienungen:

$$x < \frac{1}{2} \wedge \ x < \frac{3}{2} \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

Also die Ungleichung gilt wenn:

$$\underbrace{x < \frac{1}{2}}_{\text{Fall (ii)}} \vee \underbrace{\frac{3}{2} < x < \frac{7}{2}}_{\text{Fall (i)}}$$

d.h.

$$x \in ]-\infty, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{3}{2}, \frac{7}{2}[ \,.$$

Eine Logik-Tabelle ist in Bild 1 gezeigt.

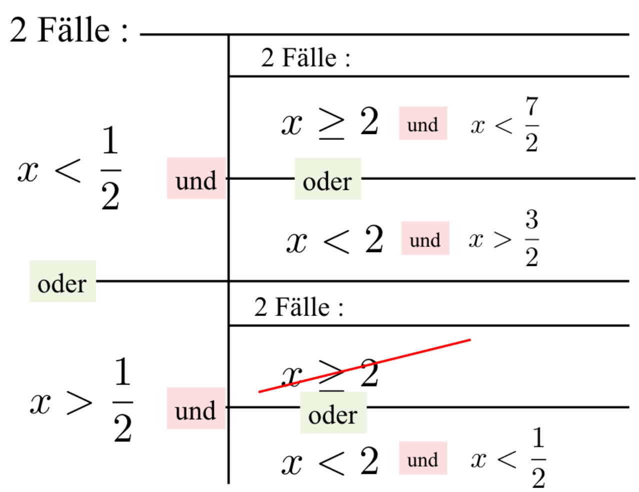


Figure 1: Die Fälleunterscheidung um die Ungleichung (3) zu lösen. Zuerst muss man die Positivität des Nenners betrachten (2 Fälle); dann, für jeder diesen Fälle, ist der Betrag $|x-2|$ zu beobachten. Jede Unterscheidung ist mit einem "oder" zu betrachten (also, mat hat Fall 1 oder Fall 1), und die Ergebnisse jedes Falls sind dann mit ein "und" zu kombinieren.

Man liest:

$$\left(x > \frac{1}{2} \wedge \left[\left(x \geq 2 \wedge x < \frac{7}{2}\right) \vee \left(x < 2 \wedge x > \frac{3}{2}\right)\right]\right) \vee$$
$$\left(x < \frac{1}{2} \wedge \left[\left(x < 2 \wedge x < \frac{1}{2}\right)\right]\right) \,.$$

## Aufgabe 3

Gegeben ist die Abbildung

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{4x^3 - 3}{3x^3 - 2}$$

a) Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$ und zerlegen Sie die Funktion in einen geraden und einen ungeraden Anteil.
b)Leiten Sie unter der Voraussetzung der Bijektivität die Abbildungsvorschrift für die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : D_{f^{-1}} \to \mathbb{R}$$

explizit her. Welchen maximalen Definitionsbereich $D_{f^{-1}} \subset \mathbb{R}$ besitzt die Umkehrabbildung? Machen Sie auch die Probe, indem Sie konkret nachweisen, dass für alle $x \in D_f$ gilt

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\left(f((x)\right) = x\,.$$

c) Setzen Sie einmal in die Funktion die komplexe Zahl $z = 1 + i$ ein. Welche komplexe Zahl ist dann $w = f(1 + i)$ ? Welchen Real- und Imaginärteil und welchen Betrag hat diese Zahl?
**Lösung.**
a) In dem Definitionsbereich muss $3x^3 - 2 \neq 0$ gelten, also

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}$$

Die Zerlegung von $f(x)$ ist durch

$$\begin{aligned}
f_g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{4x^3 - 3}{3x^3 - 2} + \frac{-4x^3 - 3}{-3x^3 - 2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(4x^3 - 3)(-3x^3 - 2) + (-4x^3 - 3)(3x^3 - 2)}{(3x^3 - 2)(-3x^3 - 2)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-12x^6 + x^3 + 6 - 12x^6 - x^3 + 6}{4 - 9x^6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-24x^6 + 12}{4 - 9x^6}\right) \\
&= \frac{-12x^6 + 6}{4 - 9x^6} = \frac{12x^6 - 6}{9x^6 - 4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{4x^3 - 3}{3x^3 - 2} - \frac{-4x^3 - 3}{-3x^3 - 2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(4x^3 - 3)(-3x^3 - 2) - (-4x^3 - 3)(3x^3 - 2)}{(3x^3 - 2)(-3x^3 - 2)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-12x^6 + x^3 + 6 + 12x^6 + x^3 - 6}{4 - 9x^6}\right) \\
&= -\frac{x^3}{9x^6 - 4}
\end{aligned}$$

gegeben.
b) Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, müssen wir nach $x$ lösen:

$$y = \frac{4x^3 - 3}{3x^3 - 2} \Rightarrow 3x^3y - 2y = 4x^3 - 3 \Rightarrow x^3(3y-4) = 2y - 3$$

Also ist

$$x^3 = \frac{2y-3}{3y-4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2y-3}{3y-4}}$$

Die Umkehrfunktion lautet $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{2y-3}{3y-4}}$ und in dem Definitionbereich muss gelten

(i) $3y - 4 \neq 0 \Rightarrow y \neq \frac{4}{3}$,

(ii) $\frac{2y-3}{3y-4} \geq 0$ sonst ist $\sqrt[3]{\ }$ nicht definiert

Für (ii), müssen $2y-3$ und $3y-4$ dasselbe Vorzeichen haben:

$$2y - 3 \geq 0 \land 3y - 4 > 0 \Rightarrow y \geq \frac{3}{2} \land y > \frac{4}{3} \Rightarrow y \geq \frac{3}{2}$$

oder

$$2y - 3 \leq 0 \land 3y - 4 < 0 \Rightarrow y \leq \frac{3}{2} \land y < \frac{4}{3} \Rightarrow y < \frac{4}{3}$$

Also, der Definitionbereich ist

$$D_{f^{-1}} = \left] -\infty, \frac{4}{3} \right[ \cup \left[ \frac{3}{2}, +\infty \right[$$

Ob die Umkehrfunktion richtig berechnet wurde, kann man überprufen, in dem man $f^{-1}f(x)$ berechnet:

$$f^{-1}f(x) = f^{-1}\left(\frac{4x^3-3}{3x^3-2}\right) = \sqrt[3]{\frac{2\frac{4x^3-3}{3x^3-2} - 3}{3\frac{4x^3-3}{3x^3-2} - 4}} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{1}} = x$$

c) Wir berechnen zu erst:

$$(1+i)^3 = 1 + 3i^2 + 3i + i^3 = 1 - 3 + 3i - i = -2 + 2i$$

also:

$$w = f(1+i) = \frac{4(1+i)^3 - 3}{3(1+i)^3 - 2} = \frac{4(-2+2i) - 3}{3(-2+2i) - 2} = \frac{-11+8i}{-8+6i}$$

Zu nächst schreiben wir $w = a + ib$:

$$w = \frac{-11+8i}{-8+6i}\left(\frac{-8-6i}{-8-6i}\right) = \frac{136+2i}{64+36} = \frac{34}{25} + \frac{1}{50}i$$

und:

$$\mathrm{Re}(w) = 1.36,\ \mathrm{Im}(w) = 0.02,\ |w| = \frac{\sqrt{136^2 + 2^2}}{100} = \frac{\sqrt{185}}{10}.$$

## Aufgabe 4

(siehe Hausaufgabe!)

## Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie zu der jeweils angegebenen reellen Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, gegeben durch $\alpha = \sqrt[4]{5-\sqrt{6}}$, zunächst ein ganzzahliges Polynom $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ von kleinstmöglichem Grad, so daß$\alpha$ eine Nullstelle ist.
b) Zeigen Sie nun, dass $\alpha \in \mathbb{R}$ als Zahl *irrational* sein muss, indem sie $f(x)$ nach allen möglichen rationalen Nullstellen durchsuchen.
**Lösung.**
(a) Aus $\alpha^4 = 5 - \sqrt{6}$ folgt dass

$$(\alpha^4 - 5)^2 = 6\,.$$

Also

$$0 = (\alpha^4 - 5)^2 - 6 = \alpha^8 - 10\alpha^4 + 25 - 6 = \alpha^8 - 10\alpha^4 + 19\,.$$

D.h. dass $\alpha$ eine Nullstelle von

$$f(x) = x^8 - 10x^4 + 19$$

ist.
(b) (Irrationalität von $\alpha$) Für eine rationale Nullstelle $\frac{p}{q}$ von $f(x)$ muss es gelten:

$$p|19 \wedge q|1\,.$$

Also $p = \pm 1, \pm 19$ und $q = \pm 1$. Es gibt dann nur 2 mögliche rationale Nullstellen, 19 und -19. Wir berechnen $f(19)$ (zum Beispiel) mit Hilfe des Hornerschemas

$$\begin{aligned}
b_8 &= 1 \\
b_7 &= a_7 + 19b_8 = 19 \\
b_6 &= a_6 + 19b_7 = 361 \\
b_5 &= a_5 + 19b_6 = 6859 \\
b_4 &= a_4 + 19b_5 = 130311 \\
b_3 &= a_3 + 19b_4 = 2475909 \\
b_2 &= a_2 + 19b_3 = 2475909 \cdot 19 \\
b_1 &= a_1 + 19b_2 = 2475909 \cdot 19^2 \\
f(19) = b_0 &= a_0 + 19b_1 = 2475909 \cdot 19^3 + 19 \neq 0
\end{aligned}$$

und da $f(x)$ eine gerade Funktion ist ($f(x) = f(-x)$) folgt $f(-19) \neq 0$.
Also hat $f(x)$ keine rationale Nullstelle, und daraus folgt dass $\alpha \notin \mathbb{Q}$.