Vorlesung vom 29.10.2013:

- Mengenlehre (naiv): Siehe dazu das Skript auf der Homepage

Teilmengenrelation: Wir definieren für zwei Mengen A, B:

$$\underline{A \subseteq B} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x : (x \in A \to x \in B) \quad \text{ist wahr.}$$

„A ist Teilmenge von B"

Dann heißt $\boxed{A \not\subseteq B} \Leftrightarrow \neg[\forall x : (x \in A \to x \in B)]$

$$\Leftrightarrow \exists x : \neg(\underbrace{x \in A \to x \in B}_{\Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee (x \in B)})$$

$$\Leftrightarrow \exists x : \neg\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\exists x : x \in A \wedge x \notin B}$$

Was ist mit der leeren Menge $\emptyset$ bzw. $\{\}$ los?

Wäre $\emptyset \not\subseteq A$ für eine Menge A, dann würde gelten:

$$⚡ \quad \exists x : x \in \emptyset \wedge x \notin A$$

Da aber „$\exists x : x \in \emptyset \ldots$" offensichtlich falsch ist, muss gelten:

$$\emptyset \subseteq A \quad \text{für \underline{jede} Menge } A, \text{ speziell auch } \emptyset \subseteq \emptyset$$

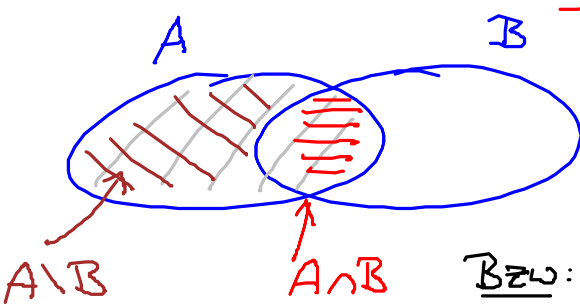
Ebenso gilt für jede Menge A:

$$A \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in A) \Leftrightarrow \forall x\,(\neg(x \in A) \vee x \in A)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\,(x \notin A \vee x \in A) \quad \text{Immer wahr!}$$

Bemerkung zur Differenzmenge:

$$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = A \setminus (A \cap B)$$



Im Fall $A \cap B = \emptyset$:

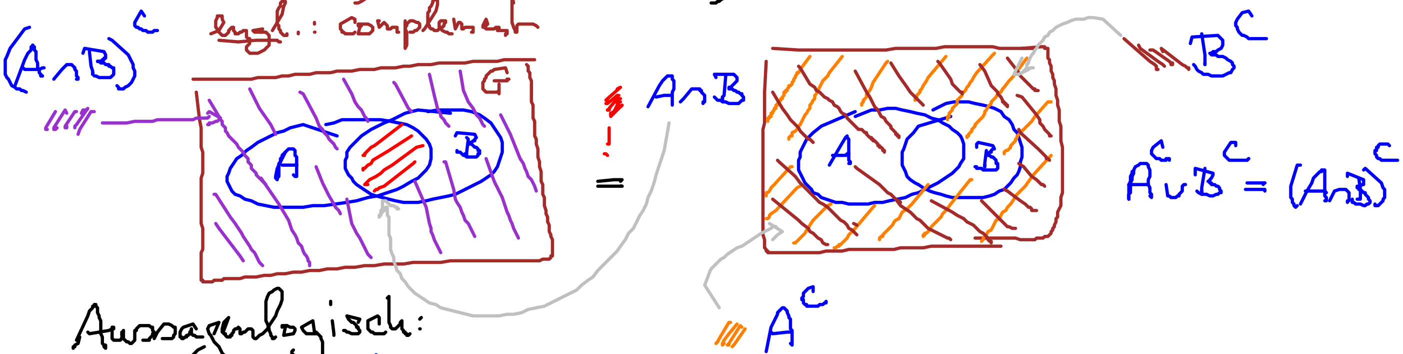
$$\boxed{A \setminus B = A}$$

Bzw: $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

De Morgans Gesetze (beruhen auf der Logik):

(i) $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$, (ii) $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$

engl.: complement



Aussagenlogisch:

$$x\in (A\cap B)^c \iff x\notin A\cap B \iff \neg(x\in A\cap B)$$

$$\iff \neg(x\in A \wedge x\in B) \iff \neg(x\in A)\vee\neg(x\in B)$$

De Morgan der Aussagenlogik

$$\iff x\notin A \vee x\notin B \iff x\in A^c \vee x\in B^c$$

$$\iff x\in A^c\cup B^c$$

Also: $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\blacksquare$ ← Beweisende