Vorlesung vom 23.01.2014:

- Geometrische Summe, Polynome allgemein
- Hornerschema zur Berechnung von Funktionswerten und zur PD (= Polynomdivision)
- Nachtrag zu Binomialkoeffizienten $\binom{?}{\cdot}$

1) Zu geometrischen Summe:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

($1 = x^0$, $x = x^1$)

$f(1) = ?$

$$= \frac{g_n(x)}{1-x}$$

Summen-freie Darstellung!

Beachte:

$$g_n(x) = (1-x) \cdot f_n(x) \overset{?}{=} 1 - x^{n+1}$$

ist Teleskopsumme!

spezielle Gestalt dieses Polynoms ist zu ermitteln!

Zum Vergleich: „geometrisches Produkt":

$$p_n(x) = \prod_{k=0}^{n} x^k = x^0 \cdot x^1 \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^n$$

($x^0 = 1$, $x^1 = x$)

$$= x^{0+1+2+\ldots+n} = x^{\sum_{k=0}^{n} k}$$

(PR)

$$= x^{\frac{n(n+1)}{2}} = x^{\binom{n+1}{2}}$$

($k = 2$, $\alpha = n+1$)

produkt-freie Darstellung

Binomialkoeffizient

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+1-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\alpha+1-i}{i}$$

Zu Aufgabe 46 (c):

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{(2^k)}\right) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \cdot \ldots \cdot (1 + x^{2^n})$$

($x = x^{(2^0)}$, $x^2 = x^{(2^1)}$, $x^4 = x^{(2^2)}$)

$$= \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{g_N(x)}{1-x}$$

mit $N = N(n)$ ist gesucht!

Zu 46 (d):

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{g_n(x)}{1-x} \overset{!}{=} 0$$

Nullstellensuche

gilt nur für $x \neq 1$

$(f_n(1) \neq 0)$

$$\Leftrightarrow g_n(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = ?$$

Und dann:

$$p(x) = 1 - 2x^2 + 4x^4 - 8x^6 + 16x^8 - 32x^{10}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u^k \quad \text{für } \boxed{u = ?}, \ n = ?$$

$$= \boxed{\frac{g_n(u)}{1-u}}$$

Substitution!!

Über $g_n(u) = h(x) \overset{!}{=} 0$ gewinnt man die Nullstellen von p.

ENDE der Vorlesung!!